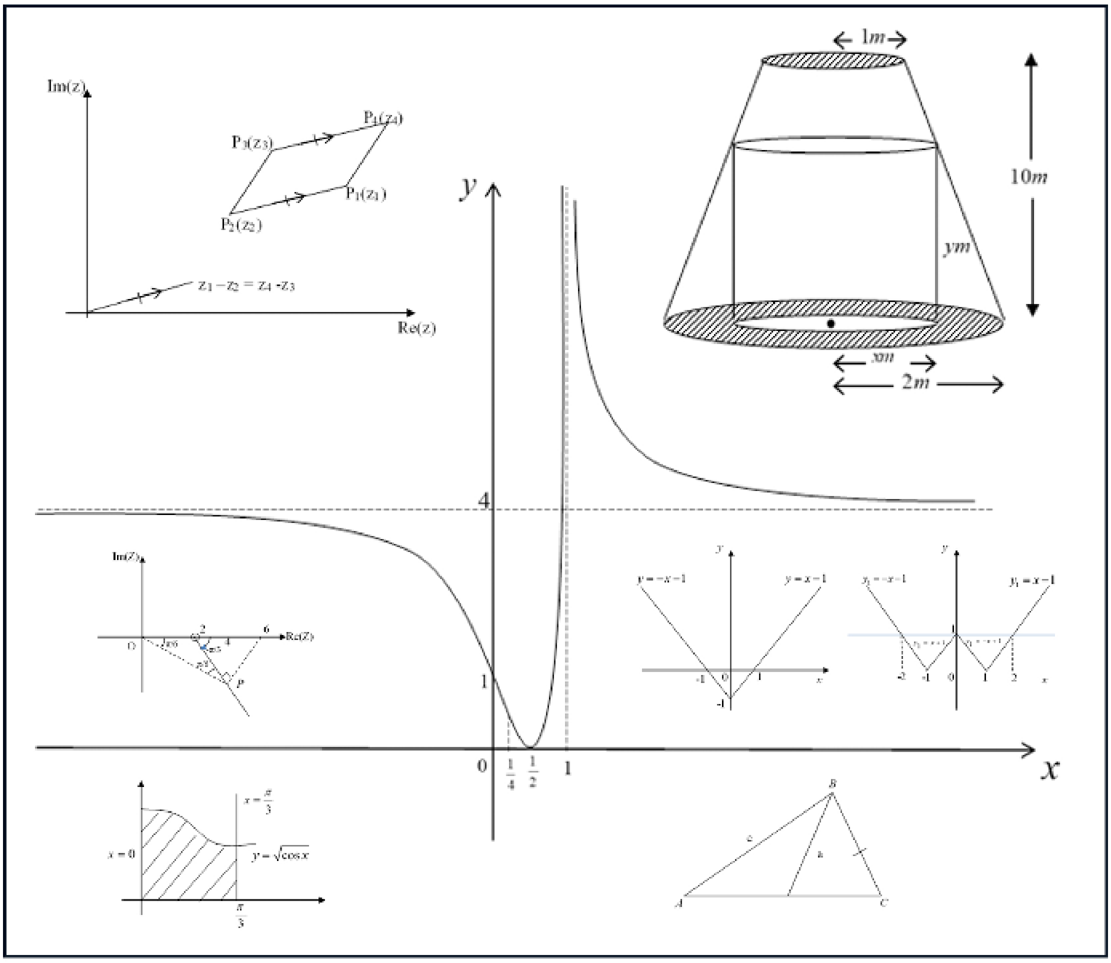
மொறட்டுவைப் பல்கலைக்கழக பொறியியற் பீட தமிழ் மாணவர்கள்
நடாத்தும் க.பொ.த உயர்தர மாணவர்களுக்கான 11வது

முன்னோடிப் பரீட்சை 2020

10(I) - இணைந்தகணிதம் I

விடைகள் (புள்ளியிடும் திட்டம்)



Prepared By
P.Senthilnathan *B.Sc , Dip in Ed*

1) **கணிதத்தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப்** பயன்படுத்தி, $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\sum_{r=1}^{n}(3r^2 - 3r + 1) = n^3$ என நிறுவுக.

$$\sum_{r=1}^{n}(3r^2 - 3r + 1) = n^3$$

n =1 எனின் $L:H:S = \sum_{r=1}^{1}(3r^2 - 3r + 1)$, $\quad R:H:S = 1$

$$= 3\times 1^2 - 3\times 1 + 1$$
$$= 1$$

05

$\therefore L:H:S = R:H:S$

$\therefore$ $n = 1$ இற்கு முடிவு உண்மை

$n = p$ இற்கு முடிவு உண்மை என்க.

அதாவது $\sum_{r=1}^{p}(3r^2 - 3r + 1) = p^3$ 05

$n = p+1$ ஆக $\sum_{r=1}^{p+1}(3r^2 - 3r + 1) = \sum_{r=1}^{p}(3r^2 - 3r + 1) + \left[3\left(p+1\right)^2 - 3\left(p+1\right)\right] + 1$ 05

$$= p^3 + (3p^2 + 6p + 3 - 3p - 3 + 1)$$
$$= p^3 + 3p^2 + 3p + 1$$

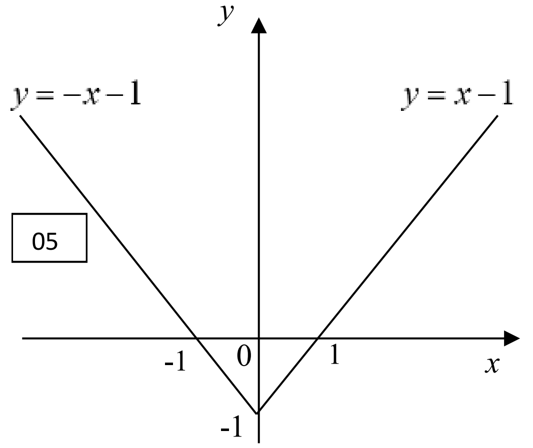
$\sum_{r=1}^{p+1}(3r^2 - 3r + 1) = \left(p+1\right)^3$ 05

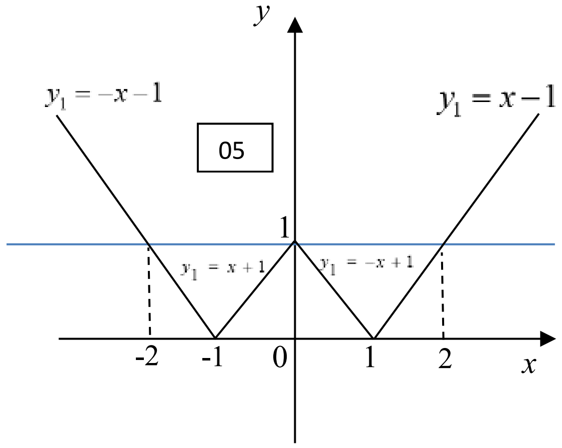
$\therefore$ $n = p+1$ இற்கும் முடிவு உண்மை

$\therefore n$ இன் எல்லா நேர் நிறை எண்களிற்கும் இம்முடிவானது கணிதத் தொகுத்தறிவு முறையால் உண்மையாகும் 05

2) ஒரு வரிப்படத்தில் $y = |x| - 1$ இன் வரைபை பரும்படியாக வரைக. இதிலிருந்து வேறொரு வரிப்படத்தில் $y = \left||x| - 1\right|$ இன் வரைபை வரைக.

இரண்டாவது வரிப்படத்தில் y=1 இன் வரைபையும் வரைந்து, இதிலிருந்து $|x| \geq 2$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களின் வீச்சைக் காண்க.





$\left.\begin{array}{l} y=-x-1 \\ y=1 \end{array}\right\}\ x = -2$

05

$\left.\begin{array}{l} y = x-1 \\ y = 1 \end{array}\right\}\ x = 2$

$y_1 = \left||x|-1\right|, y_2 = 1$

$|x| \geq 2$

$\Rightarrow |x|-1 \geq 1$

$\Rightarrow \left||x|-1\right| \geq 1$ 05

$\Rightarrow y_1 \geq y_2$

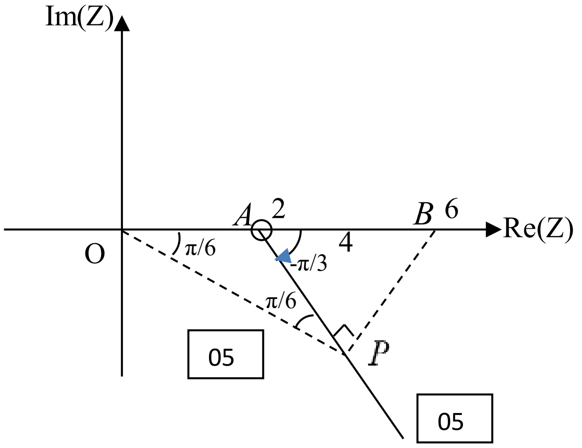
$x \leq -2$ or $x \geq 2$ 05

3) $Arg\left(Z-2\right) = -\dfrac{\pi}{3}$ ஐ திருப்தியாக்கும் சிக்கல் எண்கள் Z ஐ வகைகுறிக்கும் புள்ளிகளின் ஒழுக்கை ஒரு ஆகண் வரிப்படத்தில் பரும்படியாக வரைக. இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக $Arg\left(\overline{Z}-2\right) = \dfrac{\pi}{3}$ ஆகுமாறு $|Z-6|$ இழிவாக உள்ள Z ஐக் காண்க.

$Arg(\overline{Z}-2) = \dfrac{\pi}{3}$

$\Rightarrow Arg(\overline{Z-2}) = \dfrac{\pi}{3}$

$\Rightarrow Arg(Z-2) = -\dfrac{\pi}{3}$ 05



$\therefore$ $Arg(Z-2) = -\dfrac{\pi}{3}$ ஆகுமாறு $|Z-6|$ இழிவாக உள்ள Z வகைகுறிக்கும் புள்ளி P ஆகும்.

05

$OP = 4\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}$

$\therefore$ P குறிக்கும் சிக்கல் எண் $= 2\sqrt{3}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$

$= 2\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)$ 05

$= 3 - \sqrt{3}i$

4) $a(>0)$ மாறிலியாக இருக்க $\left(ax^2+\dfrac{3}{x^3}\right)^{10}$ இன் ஈருறுப்பு விரிவில் x ஐ சாராத உறுப்பு $\dfrac{70}{3}$ எனின் a இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$$\left(ax^2+\frac{3}{x^3}\right)^{10}$$

$$T_{r+1}={}^{10}C_r\left(ax^2\right)^{10-r}\left(\frac{3}{x^3}\right)^r \quad \boxed{05}$$

$$=\left[{}^{10}C_r a^{10-r}.3^r\right]\frac{x^{20-2r}}{x^{3r}}$$

$$T_{r+1}=\left[{}^{10}C_r x^{10-r}.3^r\right]x^{20-5r} \quad \boxed{05}$$

x ஐ சாராத உறுப்பிற்கு $20-5r=0 \quad \Rightarrow \quad r=4$ $\boxed{05}$

$$\therefore T_5={}^{10}C_4 a^6.3^4=\frac{70}{3} \quad \boxed{05}$$

$$\frac{10!}{6!\times 4!}\times a^6\times 3^4=\frac{70}{3}$$

$$\frac{7\times 8\times 9\times 10}{2\times 3\times 4}a^6=\frac{70}{3}$$

$$a^6=\frac{1}{3^6}$$

$$\Rightarrow a=\frac{1}{3} \quad (\because a>0) \quad \boxed{05}$$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\left(x^2\right)}{\sin x\left(1-\sqrt{\cos x}\right)}=4$ எனக் காட்டுக.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\left(x^2\right)}{\sin x\left(1-\sqrt{\cos x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\left(x^2\right)\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}{\sin x(1-\cos x)} \quad \boxed{05}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\left(x^2\right)\left(1+\sqrt{\cos x}\right)(1+\cos x)}{\sin x.\sin^2 x} \quad \boxed{05}$$

$$\boxed{05} \quad =\frac{\lim\limits_{x^2\to 0}\dfrac{\sin\left(x^2\right)}{x^2}\times\lim\limits_{x\to 0}\left\{\left(1+\sqrt{\cos x}\right)(1+\cos x)\right\}}{\left[\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\right]^3} \quad \boxed{05}$$

$$=\frac{1}{1}\times(1+1)(1+1)=4$$

$\boxed{05}$

6) $y=\sqrt{\cos x}, x=0, x=\frac{\pi}{3}, y=0$ எனும் வளையிகளினால் உள்ளடைக்கப்படும் பிரதேசம், $x-$ அச்சைப்பற்றி நான்கு செங்கோணங்களினூடாக சுழற்றப்பெறப்படும் கனவளவு $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$ கன அலகுகள் எனக் காட்டுக.

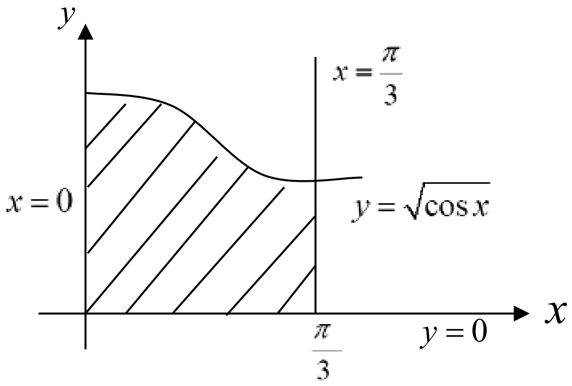
கனவளவு $=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \pi y^2 dx$ 10

$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx$ 05

$=\pi\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$ 05

$=\pi\times\left[\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right]$ 05

$=\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$ கன அலகுகள்.



7) $t(\neq 0)$ ஆகவுள்ள மெய்ப்பரமானத்திற்கு $x^3-y^2=0$ எனும் வளையி C இல் யாதுமொரு புள்ளி $P(4t^2, 8t^3)$ இல் வரையப்பட்ட தொடலியின் சமன்பாடு $3tx-y-4t^3=0$ எனக் காட்டுக.
P இல் உள்ள தொடலி, வளையி C இற்கு புள்ளி $Q(4T^2, 8T^3)$ இல் செவ்வனாக அமையின் $T=-\frac{1}{9t}$ எனக் காட்டுக.

$x^3-y^2=0$

$\Rightarrow 3x^2-2y^1\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{2y}$ 05

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(4t^2,8t^3)}=\frac{3\times 16t^4}{2\times 8t^3}=3t \rightarrow P$ இல் தொடலியின் படித்திறன். 05

P யில் தொடலியின் சமன்பாடு $\frac{y-8t^3}{x-4t^2}=3t$ 05

$\Rightarrow y-8t^3=3tx-12t^3 \Rightarrow 3tx-y-4t^3=0$

$Q\equiv(4T^2, 8T^3)$

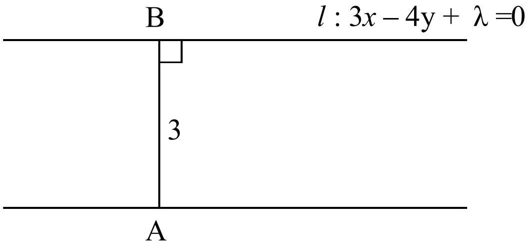
Q இல் தொடலியின் படித்திறன் $=3T$

Q இல் செவ்வனின் படித்திறன் $=-\frac{1}{3T}$ 05

$\therefore 3t=-\frac{1}{3T}$ 05

$\Rightarrow T=-\frac{1}{9t}$

8) $(2,3)$ எனும் புள்ளிக்கூடாக செல்வதும் படித்திறன் $\frac{3}{4}$ ஐ உடையதுமான கோட்டின் சமன்பாடு $3x-4y+6=0$ எனக் காட்டுக. இக்கோட்டிற்கு சமாந்தரமாக 3 அலகுகள் தூரத்தில் உள்ள கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.



$\frac{y-3}{x-2}=\frac{3}{4}$ 05

$4y-12=3x-6 \Rightarrow 3x-4y+6=0$

$3x-4y+6=0$ சமாந்தரமான கோடு l ஐ

$l: 3x-4y+\lambda=0$ என்க $\lambda-$ பரமானம் 05

$\Rightarrow \frac{|3\times 2-4\times 3+\lambda|}{\sqrt{9+16}}=3$ 05

$|\lambda-6|=15 \Rightarrow \lambda-6=\pm 15$

$(+) \Rightarrow \lambda=21$

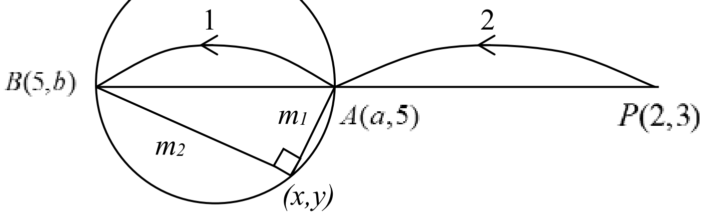
$(-) \Rightarrow \lambda=-9$ 05

$\therefore$ கோடுகள் $3x-4y+\lambda=0$

$\lambda=21 \Rightarrow 3x-4y+21=0$

$\lambda=-9 \Rightarrow 3x-4y-9=0$ 05

9) $S=0$ என்னும் வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ள புள்ளி $P(2,3)$ இல் இருந்து $S=0$ இற்கு மிக அருகில், அதிதொலைவில் உள்ள புள்ளிகள் முறையே $A\equiv(a,5), B\equiv(5,b)$ என்பன $PA:PB=2:3$ ஆகுமாறு அமைந்துள்ளன. $a=4, b=6$ எனக்காட்டி, $S=0$ இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.



விகிதத்தேற்றப்படி

$a=\frac{2\times 5+1\times 2}{2+1}$ 05 $\qquad 5=\frac{2\times b+1\times 3}{2+1}$ 05

$\Rightarrow a=4 \qquad \Rightarrow b=6$

$A\equiv(A,5), B\equiv(5,6)$

$S=0$ என்பது AB ஐ விட்டமாக கொண்ட வட்டமாகும். 05

$S=0 \Rightarrow m_1\times m_2=-1$

$\frac{y-5}{x-4}\times\frac{y-6}{x-5}=-1$ 05

$(x-4)(x-5)+(y-5)(y-6)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-9x-11y+50=0$ 05

10) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ இற்கு $\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{1+\tan^2\theta}-1}{\tan\theta}$ எனக் காட்டுக. $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=2-\sqrt{3}$ என்பதை உய்த்தறிக.

$$\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}-1}{\tan\theta}=\frac{\sqrt{\sec^2\theta}-1}{\tan\theta}$$

$$=\frac{\sec\theta-1}{\tan\theta},\ \because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}$$ 05

$$=\frac{\dfrac{1}{\cos\theta}-1}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$ 05

$$=\frac{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}-1}{\tan\theta}=\tan\frac{\theta}{2}$$ 05

$$\therefore \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}-1}{\tan\theta}$$

$$\theta=\frac{\pi}{6}\Rightarrow \tan\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{1+\tan^2\dfrac{\pi}{6}}-1}{\tan\dfrac{\pi}{6}}$$

05

$$=\frac{\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}-1}{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$$ 05

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=2-\sqrt{3}$$

11)

a) $b,c(\neq 0)$ மெய்யெண்களாக இருக்க $x^2-bx+c=0$ எனும் சமன்பாட்டிற்கு பூச்சியம் மூலமன்று எனக்காட்டுக.

$b^2>4c$ ஆக இருக்க $x^2-bx+c=0$ இன் மூலங்கள் α,β எனக் கொள்வோம். α,β என்பன வேறு வேறான மெய் மூலங்கள் எனக்காட்டுக.

$\alpha+\beta,\alpha\beta$ ஐ b,c இன் உறுப்புக்களில் எழுதி, $|\alpha|+|\beta|=\sqrt{b^2-2c+2|c|}$ எனக்காட்டுக.
$\left(\frac{1}{|\alpha|}+1,\frac{1}{|\beta|}+1\right)$ ஆகியவற்றை மூலங்களாக கொண்ட சமன்பாடு

$|c|x^2-\left(\sqrt{b^2-2c+2|c|}+2|c|\right)x+\left(\sqrt{b^2-2c+2|c|}+|c|+1\right)=0$ எனக் காட்டுக.

α,β இரண்டும் நேர் அல்லது மறை எனின் $\left(\frac{1}{|\alpha|}+1,\frac{1}{|\beta|}+1\right)$ ஐ மூலங்களாக கொண்ட சமன்பாடு

$cx^2-(|b|+2c)x+(|b|+c+1)=0$ என உய்த்தறிக.

x^2-bx+c இல் 0 ஐ இட
$=c\neq 0$ 05
$\therefore$ 0 ஆனது மூலமன்று

$x^2-bx+c=0$
$\Delta=(-b)^2-4\times 1\times c=b^2-4c$ 10
$\Delta>0 \quad (\because b^2>4c)$ 05
$\therefore \alpha,\beta$ என்பன வேறுவேறான மெய்மூலங்கள் 05

$\alpha+\beta=b$, $\alpha\beta=c$ 05
$(|\alpha|+|\beta|)^2=\alpha^2+\beta^2+2|\alpha||\beta|$ 10
$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|$
$(|\alpha|+|\beta|)^2=b^2-2c+2|c|$ 05
$|\alpha|+|\beta|=\sqrt{b^2-2c+2|c|} \quad (\because |\alpha|+|\beta|>0)$ 05

$\left(\frac{1}{|\alpha|}+1\right)+\left(\frac{1}{|\beta|}+1\right)=\frac{1}{|\alpha|}+\frac{1}{|\beta|}+2$

$=\frac{|\beta|+|\alpha|}{|\alpha||\beta|}+2$

$=\frac{\sqrt{b^2-2c+2|c|}}{|c|}+2$ 05

$$\left(\frac{1}{|\alpha|}+1\right)\left(\frac{1}{|\beta|}+1\right)=\frac{1}{|\alpha\beta|}+\left(\frac{1}{|\alpha|}+\frac{1}{|\beta|}\right)+1$$ 05

$$=\frac{1}{|c|}+\frac{\sqrt{b^2-2c+2|c|}}{|c|}+1$$

$$=\frac{\sqrt{b^2-2c+2|c|}+1}{|c|}+1$$ 05

$\left(\frac{1}{|\alpha|}+1,\frac{1}{|\beta|}+1\right)$ ஆகியவற்றை மூலங்களாக கொண்ட சமன்பாடு.

$$x^2-\left[\left(\frac{1}{|\alpha|}+1\right)+\left(\frac{1}{|\beta|}+1\right)\right]x+\left[\left(\frac{1}{|\alpha|}+1\right)\left(\frac{1}{|\beta|}+1\right)\right]=0$$ 10

$$\Rightarrow x^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-2c+2|c|}}{|c|}+2\right)x+\left(\frac{\sqrt{b^2-2c+2|c|}+1}{|c|}+1\right)=0$$

$$|c|x^2-\left(\sqrt{b^2-2c+2|c|}+2|c|\right)x+\left(\sqrt{b^2-2c+2|c|}+|c|+1\right)=0$$ 05

$\alpha,\beta>0$ or $\alpha,\beta<0 \Rightarrow \alpha\beta>0$ 05

$\Rightarrow c>0$

$\therefore |c|=c$ 05

$\left(\frac{1}{|\alpha|}+1,\frac{1}{|\beta|}+1\right)$ ஐ மூலங்களாக கொண்ட சமன்பாடு

$$|c|x^2-\left(\sqrt{b^2-2c+2|c|}+2|c|\right)x+\left(\sqrt{b^2-2c+2|c|}+|c|+1\right)=0$$

$$cx^2-\left(\sqrt{b^2-2c+2c}+2c\right)x+\left(\sqrt{b^2-2c+2c}+c+1\right)=0$$ 05

$$cx^2-\left(|b|+2c\right)x+\left(|b|+c+1\right)=0$$ 05

100

---

b) ஒரு பல்லுறுப்பிச்சார்பு $f(x)$ ஆனது $f(x)=ax^3+15x^2+6x-b$ என்பதால் தரப்படுகிறது. இங்கு a,b மாறிலிகள். $f(x)$ இற்கு $(x+1)$ ஒரு காரணியாகவும், $f(x)$ ஐ $(x-1)$ ஆல் வகுக்க பெறப்படும் மீதி 16 ஆகவும் இருப்பின்

(i) $a=2, b=7$ எனக் காட்டுக.

(ii) $f(x)$ ஐ ஏகபரிமானக்காரணிகளின் பெருக்கமாகத் தருக.

இதிலிருந்து $8ax^3+60x^2=b-12x$ ஐ முற்றாகத்தீர்க்க.

$f(x)=ax^3+15x^2+6x-b$

$(x+1)$ காரணி $\Rightarrow f(-1)=0$ 05

$\Rightarrow a(-1)^3+15\times(-1)^2+6\times(-1)-b=0$

$\Rightarrow a+b=9.................(1)$

$(x-1)$ ஆல் வகுக்க மீதி $f(1)=16$ 05

$\Rightarrow a\times1^3+15\times1^2+6\times1-b=16$

$a-b=-5.................(2)$

$(1)+(2)\Rightarrow a=2$ 05

$(1)\Rightarrow b=7$

$\therefore f(x)=2x^3+15x^2+6x-7\equiv(x+1)\left(px^2+qx+r\right)$

இங்கு p,q,r மாறிலிகள்

$\left[x^3\right]\Rightarrow 2=p$

$\left[x^2\right]\Rightarrow 15=q+p\Rightarrow 13=q$

மாறிலி $\Rightarrow -7=r$

$p=2, q=13, r=-7$ 10

$\therefore f(x)=2x^3+15x^2+6x-7\equiv(x+1)(2x^2+13x-7)$

$\equiv(x+1)(2x-1)(x+7)..............(3)$ 05

$8ax^3+60x^2=b-12x$

$8ax^3+60x^2+12x-b=0$

$a=2, b=7\Rightarrow 16x^3+60x^2+12x-7=0$ 05

$2(2x)^3+15(2x)^2+6(2x)-7=0$ 05

$\Rightarrow f(2x)=0$ 05

$\Rightarrow(2x+1)(2.2x-1)(2x+7)=0;$ (3) இலிருந்து

$\Rightarrow x=-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{7}{2}$ 05

50

12)

a) A,B எனும் இரு வேறு பிரதேச செயலகங்களில் இருந்து 8 பேர் கொண்ட கலாச்சாரக்குழுவொன்று தெரிவு செய்யப்பட வேண்டியுள்ளது. பிரதேச செயலகம் A இல் 4 ஆண்களும் 5 பெண்களும், பிரதேச செயலகம் B இல் 5 ஆண்களும் 4 பெண்களும் உள்ளனர். கலாச்சாரக்குழு தெரிவு செய்யும் போது ஆண், பெண் உறுப்பினர்களின் எண்ணிக்கை சமனாகவும், ஒவ்வொரு பிரதேச செயலகத்தில் இருந்தும் சம எண்ணிக்கையிலும் இருத்தல் வேண்டும் எனின்,

(i) கலாச்சாரக்குழு தெரிவு செய்யப்படும் வழிகளின் எண்ணிக்கை யாது?

(ii) அமைக்கப்பட்ட கலாச்சாரக்குழுக்களில் ஒவ்வொரு பிரதேச செயலகத்திலும் ஆண், பெண் உறுப்பினர்கள் சமமாக இருக்கும் குழுக்களில் உள்ளவர்களை வரிசை ஒன்றில் ஒழுங்குபடுத்தக் கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

A		B		குழுக்களின் எண்ணிக்கை	
M(4)	W(5)	M(5)	W(4)		
4	-	-	4	${}^4C_4 \times {}^4C_4 = 1$	10
-	4	4	-	${}^5C_4 \times {}^5C_4 = 25$	10
3	1	1	3	${}^4C_3 \times {}^5C_1 \times {}^5C_1 \times {}^4C_3 = 400$	10
1	3	3	1	${}^4C_1 \times {}^5C_3 \times {}^5C_3 \times {}^4C_1 = 1600$	10
2	2	2	2	${}^4C_2 \times {}^5C_2 \times {}^5C_2 \times {}^4C_2 = 3600$	10

மொத்த எண்ணிக்கை = 1 + 25 + 400 + 1600 + 3600
= 5626 **05**

ii. 3600 x 8!=145152000 **10**

65

---

b) $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $u_r = \dfrac{1}{r(r+1)(r+2)}$ எனவும் $f(r) = \dfrac{\lambda}{r(r+1)}$ எனவும் கொள்வோம். இங்கு λ மெய்மாறிலி $u_r = f(r) - f(r+1)$ ஆகுமாறு $\lambda = \dfrac{1}{2}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} u_r = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}$ எனக் காட்டுக.

$r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $v_r = \dfrac{1}{(r+1)(r+2)(r+3)}$ எனத்தரப்படின், $\sum_{r=1}^{n} v_r = \dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{2(n+2)(n+3)}$ என உய்த்தறிக. $u_r + v_r$ ஐக் கருதுவதன் மூலம் $\sum_{r=1}^{n} w_r = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2(n+1)(n+2)} - \dfrac{1}{2(n+2)(n+3)}$ என உய்த்தறிக. இங்கு $w_r = \dfrac{2r+3}{r(r+1)(r+2)(r+3)}$ ஆகும்.

$\sum_{r=1}^{\infty} w_r$ ஒருங்குகின்றது எனக்காட்டி, அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

$$u_r = \frac{1}{r(r+1)(r+2)} ....(1), \quad f(r) = \frac{\lambda}{r(r+1)}$$

$$f(r) - f(r+1) = u_r$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{r(r+1)} - \frac{\lambda}{(r+1)(r+2)} = \frac{1}{r(r+1)(r+2)}$$ 05

$$\Rightarrow \frac{\lambda[(r+2)-r]}{r(r+1)(r+2)} = \frac{1}{r(r+1)(r+2)}$$

$$\Rightarrow 2\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$ 05

$$\therefore f(r) = \frac{1}{2r(r+1)}$$

$$u_r = f(r) - f(r+1)$$

$$r = 1 \Rightarrow u_1 = f(1) - f(2)$$
$$r = 2 \Rightarrow u_2 = f(2) - f(3)$$ 10
$$r = 3 \Rightarrow u_3 = f(3) - f(4)$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$r = n-1 \Rightarrow u_n = f(n-1) - f(n)$$
$$r = n \Rightarrow u_n = f(n) - f(n+1)$$ 10

கூட்ட $\sum_{r=1}^{n} u_r = f(1) - f(n+1)$ 05

$$= \frac{1}{2\times1\times2} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$ 05

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} ....(2)$$

$$v_r = \frac{1}{(r+1)(r+2)(r+3)}$$

$$v_r = u_{r+1}$$ 05

$$\sum_{r=1}^{n} v_r = \sum_{r=1}^{n} u_{r+1}$$

$$= \sum_{r=1}^{n+1} u_r - u_1$$ 05

$$= \left\{\frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+2)(n+3)}\right\} - \frac{1}{1.2.3}$$ [(1),(2) இலிருந்து]

05

$$\Rightarrow \sum_{r=1}^{n} v_r = \frac{1}{12} - \frac{1}{2(n+2)(n+3)}$$

$$u_r + v_r = \frac{1}{r(r+1)(r+2)} + \frac{1}{(r+1)(r+2)(r+3)}$$

$$= \frac{(r+3)+r}{r(r+1)(r+2)(r+3)}$$ 05

$$= \frac{(2r+3)}{r(r+1)(r+2)(r+3)}$$

$$= w_r$$

$$u_r + v_r = w_r$$

$$w_r = u_r + v_r$$

$$\Rightarrow \sum_{r=1}^{n} w_r = \sum_{r=1}^{n} (u_r + v_r)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} u_r + \sum_{r=1}^{n} v_r$$ 05

$$= \left\{\frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}\right\} + \left\{\frac{1}{12} - \frac{1}{2(n+2)(n+3)}\right\},$$

$$\sum_{r=1}^{n} w_r = \frac{1}{3} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} - \frac{1}{2(n+2)(n+3)}$$ 05

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} w_r = \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{3} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} - \frac{1}{2(n+2)(n+3)}\right\}$$ 05

$$= \frac{1}{3}$$ 05

$\therefore$ ஒருங்கும்.

அதன் கூட்டுத்தொகை $\sum_{r=1}^{\infty} w_r = \frac{1}{3}$ 05

85

---

13)

a) $a, b \in \mathbb{R}$ ஆயிருக்க $A = \begin{pmatrix} 4 & b \\ 3 & a \end{pmatrix}$ எனக்கொள்வோம். தாயம் A இன் நேர்மாறு A^{-1} இருப்பதில்லை எனின் $4a = 3b$ எனக் காட்டுக.

$4a \neq 3b$ ஆக உள்ள போது A^{-1} ஐ எழுதி $A = A^{-1}$ எனின் $a = -4, b = -5$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $BC = O$ ஆகுமாறு பூச்சியமற்ற, வரிசை 2 ஐ உடைய தாயங்கள் B, C ஐக் காண்க. இங்கு O ஆனது வரிசை 2 ஐ உடைய பூச்சியத்தாயமாகும்.

(a) $A=\begin{pmatrix}4 & b\\ 3 & a\end{pmatrix}$ இற்கு A^{-1} இல்லை எனின் $|A|=0$ **05**

$\Rightarrow \begin{vmatrix}4 & b\\ 3 & a\end{vmatrix}=0 \Rightarrow 4a-3b=0$ **05**

$4a-3b=0 \Rightarrow 4a=3b$

$4a\neq 3b$ எனின் $A^{-1}=\dfrac{1}{4a-3b}\begin{pmatrix}a & -b\\ -3 & 4\end{pmatrix}$ **10**

$A=A^{-1}$ எனின் $\begin{pmatrix}4 & b\\ 3 & a\end{pmatrix}=\dfrac{1}{4a-3b}\begin{pmatrix}a & -b\\ -3 & 4\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}4 & b\\ 3 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{a}{4a-3b} & \dfrac{-b}{4a-3b}\\ \dfrac{-3}{4a-3b} & \dfrac{4}{4a-3b}\end{pmatrix}$ **05**

$\Rightarrow 4=\dfrac{a}{4a-3b} \Rightarrow 15a=12b \Rightarrow 5a=4b$

$3=\dfrac{-3}{4a-3b} \Rightarrow 4a-3b=-1$ **05**

$4a-3\times\dfrac{5a}{4}=-1 \Rightarrow a=-4$ **05**

$\Rightarrow b=-5$

$b=\dfrac{-b}{4a-3b},\ a=\dfrac{4}{4a-3b}$ என்பவற்றை $a=-4, b=-5$ என்பன திருப்திசெய்கின்றன.

$\therefore a=-4, b=-5$ **05**

$A=\begin{pmatrix}4 & -5\\ 3 & -4\end{pmatrix}$

$A=A^{-1}$

$\Rightarrow AA=AA^{-1}$ **05**

$A^2=I$

$\Rightarrow A^2-I^2=0,\ \because I^2=I$ **05**

$\Rightarrow (A-I)(A+I)=0$

$\Rightarrow BC=O;$ இங்கு $B=A-I, C=A+I$ **05**

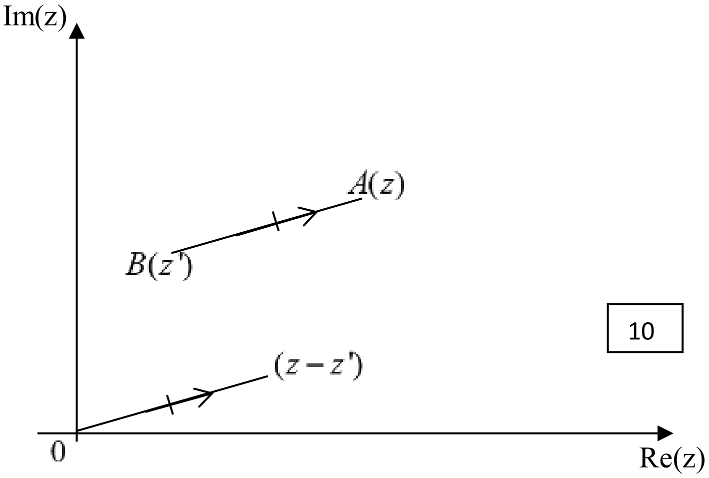
$B=\begin{pmatrix}4 & -5\\ 3 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}4 & -5\\ 3 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ **05**

$\Rightarrow B=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 3 & -5\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}5 & -5\\ 3 & -3\end{pmatrix}$

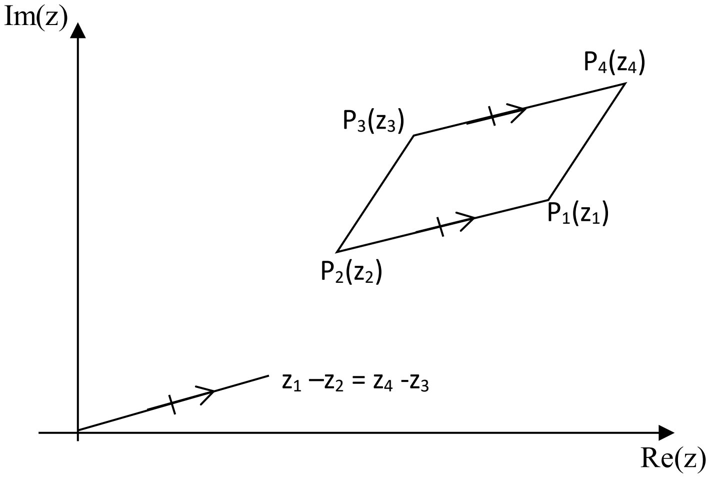
60

b) z, z' ஆகியன இரு சிக்கலெண்கள் எனின் $z - z'$ ஐ ஆகண் வரிப்படத்தில் குறித்துக்காட்டுக.

ஆகண் வரிப்படத்தில் z_1, z_2, z_3, z_4 ஆகிய வேறுவேறான சிக்கலெண்கள் வகைக்குறிக்கும் புள்ளிகள் முறையே P_1, P_2, P_3, P_4 ஆகும். இங்கு P_1, P_2, P_3, P_4 என்பன ஒரே நேர்கோட்டில் இல்லை. $z_1 - z_2 = z_4 - z_3$ ஆக இருந்தால் - இருந்தால் மாத்திரம் $P_1P_2P_3P_4$ ஒரு இணைகரம் எனக்காட்டுக. இம் முடிவைப்பயன்படுத்தி இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமகூறிடும் என நிறுவுக.



10



$P_1P_2P_3P_4$ இணைகரம் $\Leftrightarrow P_1P_2 = P_4P_3$ and $P_1P_2 // P_3P_4$ 05

$\Leftrightarrow |z_1 - z_2| = |z_4 - z_3|$ and $Arg(z_1 - z_2) = Arg(z_4 - z_3)$

05 05

$\Leftrightarrow z_1 - z_2 = z_4 - z_3$ 05

$\therefore P_1P_2P_3P_4$ இணைகரம் $\Leftrightarrow z_1 - z_2 = z_4 - z_3$

$\therefore P_1P_2P_3P_4$ இணைகரம் $\Leftrightarrow z_1 - z_2 = z_4 - z_3$

$\Leftrightarrow z_1 + z_3 = z_2 - z_4$

$\Leftrightarrow \dfrac{z_1 + z_3}{2} = \dfrac{z_2 + z_4}{2}$ 05

$\dfrac{z_1 + z_3}{2}$ என்பது மூலைவிட்டம் P_1P_3 இன் நடுப்புள்ளி குறிக்கும் சிக்கலெண்

$\dfrac{z_2 + z_4}{2}$ என்பது மூலைவிட்டம் P_2P_4 இன் நடுப்புள்ளி குறிக்கும் சிக்கலெண் 05

ஆனால் இவ்விரு சிக்கலெண்களும் சமன்.

05

$\therefore$ இணைகரம் $P_1P_2P_3P_4$ என்பதன் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமகூறிடும்.

45

---

c) $-\pi < \theta \le \pi$ இற்கு $z = \cos\theta + i\sin\theta$ எனக் கொள்வோம். த மோய்வரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $n \in \mathbb{Z}$ இற்கு $z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\cos(n\theta)$ எனக்காட்டுக.

இதிலிருந்து $3z^4 - z^3 + 2z^2 - z + 3 = 0$ ஆகுமாறு θ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

$z = \cos\theta + i\sin\theta$

$z^n = \left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n$

$z^n = \cos\left(n\theta\right) + i\sin\left(n\theta\right)$ ……………..(1) 05

$\left(\dfrac{1}{z}\right)^n = \left(\dfrac{1}{\cos\theta + i\sin\theta}\right)^n$

$= \left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^{-n}$

$= \cos\left(-n\theta\right) + i\sin(-n\theta)$ 05

$\dfrac{1}{z^n} = \cos\left(n\theta\right) - i\sin(n\theta)$ ……………..(2)

$(1) + (2) \Rightarrow z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\cos\left(n\theta\right)$ ……………..(3) 05

$3z^4 - z^3 + 2z^2 - z + 3 = 0$

$3z^2 - z + 2 - \dfrac{1}{z} + \dfrac{3}{z^2} = 0$ 05 $\because z = \cos\theta + i\sin\theta \ne 0$

$\Rightarrow 3\left(z^2 + \dfrac{1}{z^2}\right) - \left(z + \dfrac{1}{z}\right) + 2 = 0$

$3 \times 2\cos 2\theta - 2\cos\theta + 2 = 0;$ $\because$ (3) இல் n =2,1 ஐ இட

05 05

$$3\left(2\cos^2\theta-1\right)-\cos\theta+1=0$$

$$6\cos^2\theta-\cos\theta-2=0$$ 05

$$\left(3\cos\theta-2\right)(2\cos\theta+1)=0$$

$$\cos\theta=\frac{2}{3}\, or\ \cos\theta=-\frac{1}{2}$$

$-\pi<\theta\le\pi$ இல்

$$\theta=\alpha,-\alpha,\pi-\frac{\pi}{3},-\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$$ இங்கு $\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

$$\Rightarrow\theta=\alpha,-\alpha,\frac{2\pi}{3},-\frac{2\pi}{3}$$ 10

45

---

14)

a) $x\neq 1$ இற்கு $f(x)=\frac{(2x-1)^2}{(x-1)^2}$ எனக் கொள்வோம்.

$x\neq 1$ இற்கு $f(x)$ இன் பெறுதி $f'(x)$ ஆனது $f'(x)=-\frac{2(2x-1)}{(x-1)^3}$ இனால் தரப்படுமெனக் காட்டுக.

$y=f(x)$ இன் வரைபை அணுகுகோடுகள், $y-$ வெட்டுத்துண்டு, திரும்பற் புள்ளிகள் ஆகியவற்றைக் காட்டிப்பரும்படியாக வரைக.

$x\neq 1$ இற்கு $f''(x)=\frac{8\left(x-\frac{1}{4}\right)}{(x-1)^4}$ எனத்தரப்பட்டுள்ளது. $y=f(x)$ இன் வரைபின் விபத்திப் புள்ளியின் x ஆள்கூறைக் காண்க.

$x\neq 1$ இற்கு $f(x)=\frac{(2x-1)^2}{(x-1)^2}$ …………..(1)

x குறித்து வகையிட

$$f'(x)=\frac{(x-1)^2.2(2x-1)^1.2-(2x-1)^2.2(x-1)^1.1}{(x-1)^4}$$ 15

$$=\frac{2(x-1)(2x-1)\left[2(x-1)-(2x-1)\right]}{(x-1)^4}$$ 05

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-2(2x-1)}{(x-1)^3}$$ …………..(2)

<u>நிலைக்குத்து அணுகுகோடு</u>

$(x-1)^3=0\Rightarrow x=1$ 05

<u>கிடை அணுகுகோடு</u>

$$y = f(x) \Rightarrow y = \frac{(2x-1)^2}{(x-1)^2} \Rightarrow y = \frac{\left(2-\frac{1}{x}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}$$ 05

$x \to \pm\infty \Rightarrow y \to 4$

$y = 4$ கிடை அணுகுகோடாகும். 05

<u>$y-$ வெட்டுத்துண்டு</u>

$y = \dfrac{(2x-1)^2}{(x-1)^2}$ …………(1)

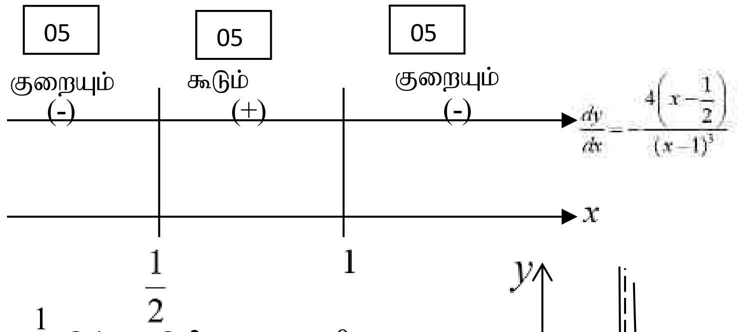
$x = 0 \Rightarrow y = 1$ 05

<u>திரும்பற்புள்ளிகள்</u>

$\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(x-1)^3}$;   (2) இலிருந்து

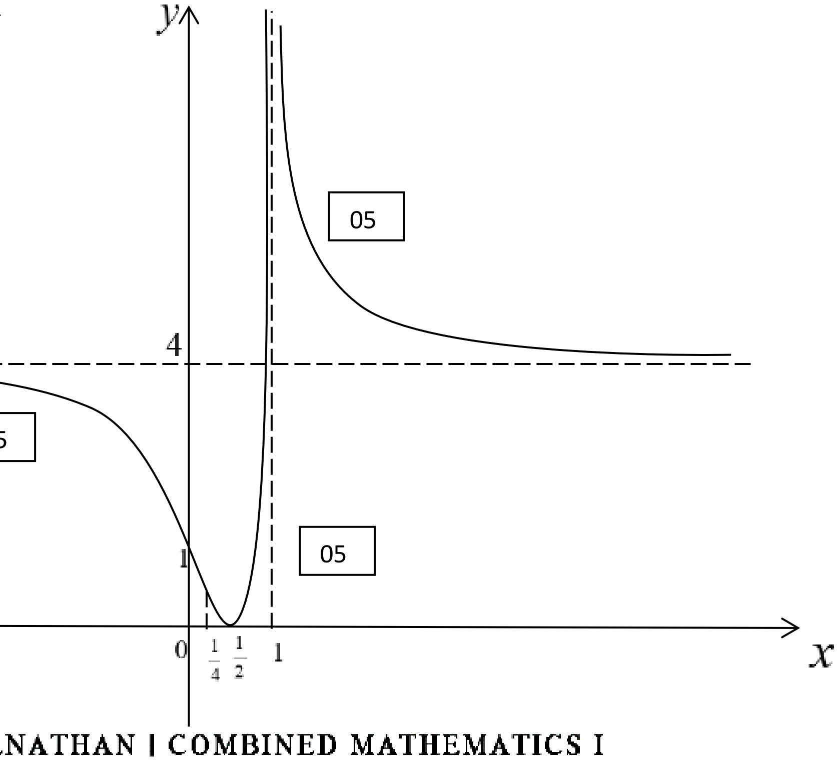
திரும்பற்புள்ளிகள் $\dfrac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$ 05



$x = \dfrac{1}{2}$ இல் y இழிவு $\Rightarrow y = 0$

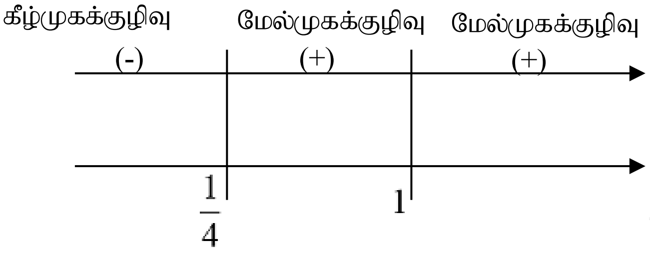
05

$\therefore$ இழிவுப்புள்ளி $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ 05



$x \neq 1$ இற்கு $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \dfrac{8\left(x-\frac{1}{4}\right)}{(x-1)^4}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{4}$ 05



$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{8\left(x-\frac{1}{4}\right)}{(x-1)^4}$ 10

$x = \dfrac{1}{4}$ இல் விபத்திப் புள்ளி உண்டு. 05

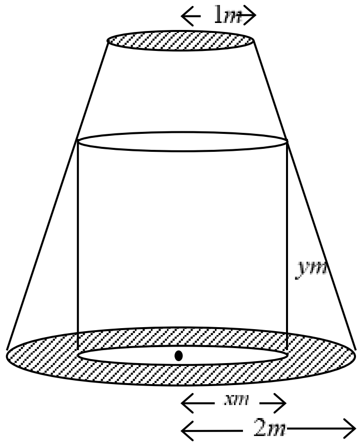
105

---

b) $10m$ உயரமும் $2m,\ 1m$ வட்ட ஆரைகளையும் கொண்ட நேரான மரக்குற்றி, கூம்பின் அடித்துண்டு வடிவத்தில் உள்ளது. இக்குற்றியில் இருந்து வெட்டப்பட்ட உருளைக்கம்பத்தின் ஆரை xm ஆகவும் உயரம் ym ஆகவும் உள்ளது. $y = 10(2-x)$ எனக் காட்டுக.

இவ்வுருளையின் கனவளவு Vm^3 எனின் $V = 10\pi x^2(2-x)$ எனக்காட்டுக.

இதிலிருந்து இவ்வாறு வெட்டப்படக்கூடிய உயர் கனவளவுடைய உருளைக் கம்பத்தின் ஆரை $\dfrac{4}{3}m$ எனக்காட்டுக.



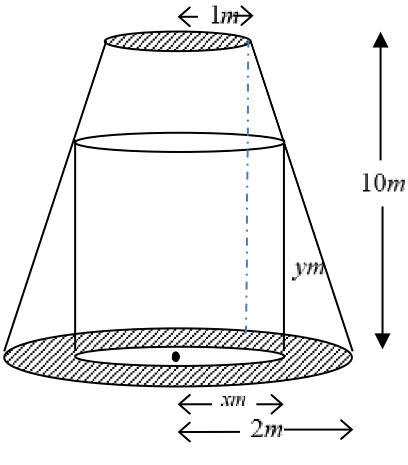
இயல்பொப்பின்படி $\dfrac{y}{10} = \dfrac{2-x}{1}$ 10

$y = 10(2-x)$ ………….(1)

உருளையின் கனவளவு $V = \pi x^2 y$ 05

$V = \pi x^2 \times 10(2-x)$

$V = 10\pi x^2(2-x) = 10\pi(2x^2 - x^3)$ 05



x குறித்து வகையிட

$$\frac{dV}{dx}=10\pi(4x^1-3x^2)$$

05

$$\frac{dV}{dx}=-30\pi x\left(x-\frac{4}{3}\right)$$

திரும்பற்புள்ளிகளில் $\frac{dV}{dx}=0$

$\Rightarrow x=\frac{4}{3}\quad(\because x>0)$ 05

$0<x<\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{dV}{dx}>0$ 05

$\frac{4}{3}<x<2\Rightarrow\frac{dV}{dx}<0$ 05

$x=\frac{4}{3}$ இல் V உயர்வு

05

$\therefore$ உயர் கனவளவிற்கு உருளையின் ஆரை $=\frac{4}{3}m$

45

---

15)

(a) $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$ இற்கு $x=4\tan^2\theta-2$ எனும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி $\int_{-2}^{2}\frac{\sqrt{x+2}}{x+6}dx$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(b) $\frac{3}{(x+1)(x+4)}$ இனை பகுதிப்பின்னங்களாக்கி, $\frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)}$ இன் பகுதிப்பின்னங்களை உய்த்தறிக. இதிலிருந்து $\int\frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$ ஐக் காண்க.

$f(t)=\int_0^t\frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$ எனக்கொள்வோம். $f(t)=\tan^{-1}(t)-\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{t}{2}\right)$ என உய்த்தறிக.

பகுதிகளாக தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி $\int\tan^{-1}(kx)\,dx$ ஐக் காண்க. இங்கு $k(\neq 0)$ மெய்மாறிலி. இதிலிருந்து $\int f(t)dt$ ஐக் காண்க.

(c) a,b ஆகியன மாறிலிகளாக இருக்க, $a+b-x=t$ எனும் பிரதியீட்டைப்பயன்படுத்தி

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\int_2^3\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{5-x}}dx=\frac{1}{2}$ எனக்காட்டுக.

(a) $\int_{-2}^{2}\frac{\sqrt{x+2}}{x+6}dx$

$x=4\tan^2\theta-2$

$dx=8\tan\theta\sec^2\theta d\theta$ 05

$\tan^2\theta=\frac{x+2}{4}$

$x=-2\Rightarrow\tan^2\theta=0$

$\tan\theta=0$

$\Rightarrow\theta=0$ 05

$x=2\Rightarrow\tan^2\theta=1$

$\tan\theta=1 \quad \left(\because 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$ 05

$=\int_{0}^{\pi/4}\frac{\sqrt{4\tan^2\theta}}{4(1+\tan^2\theta)}8\tan\theta\sec^2\theta d\theta$ 05

$=\int_{0}^{\pi/4}\frac{2\tan\theta}{4\sec^2\theta}8\tan\theta\sec^2\theta d\theta$

$=4\int_{0}^{\pi/4}\tan^2\theta d\theta$ 05

$=4\int_{0}^{\pi/4}(\sec^2\theta-1)d\theta$ 05

$=4\left\{\int_{0}^{\pi/4}\sec^2\theta d\theta-\int_{0}^{\pi/4}d\theta\right\}$

$=4\left\{\left[\tan\theta\right]_0^{\pi/4}-\left[\theta\right]_0^{\pi/4}\right\}$ 05

$=4-\pi$ 05

40

(b) $\frac{3}{(x+1)(x+4)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+4}$

$3\equiv A(x+4)+B(x+1)$

$[x]\Rightarrow 0=A+B$ ....(1) 05

(மாறிலி) $\Rightarrow 3=4A+B$ ....(2) 05

$(2)-(1)\Rightarrow A=1$ 05

$(1)\Rightarrow B=-1$

$\therefore\frac{3}{(x+1)(x+4)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}$

$x\to x^2$ ஐ இட 05

$\frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+4}$ 05

$\int\frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)}dx=\int\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+4}\right)dx$

$=\int\frac{1}{1+x^2}dx-\int\frac{1}{4+x^2}dx$

$\int\frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)}dx=\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+C$; இங்கு C எதேச்சை மாறிலி

05 05 05

$$f(t)=\int_0^t \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)}dt$$

$$=\left[\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^t$$

$$=\left\{\tan^{-1}t-\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{t}{2}\right)\right\}-\left\{\tan^{-1}0-\frac{1}{2}\tan^{-1}0\right\}$$ 05

$$f(t)=\tan^{-1}t-\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{t}{2}\right). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$\int \tan^{-1}(kx)dx=\int \tan^{-1}(kx).1dx$$

$$=\tan^{-1}(kx).x-\int x.\frac{1}{1+k^2x^2}kdx$$ 05

$$=x\tan^{-1}(kx)-\frac{1}{2k}\int\frac{2k^2x}{1+k^2x^2}dx$$ 05

$$\int \tan^{-1}(kx)dx=x\tan^{-1}(kx)-\frac{1}{2k}\ln(1+k^2x^2)+B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4).$$ இங்கு B எதேச்சை மாறிலி

05

$$\int f(t)dt=\int\left\{\tan^{-1}t-\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{t}{2}\right)\right\}dt;$$ (3) இலிருந்து

$$=\int\tan^{-1}tdt-\frac{1}{2}\int\tan^{-1}\left(\frac{t}{2}\right)dt$$ 05

$$=\left\{t\tan^{-1}t-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right\}-\frac{1}{2}\left\{t\tan^{-1}\left(\frac{t}{2}\right)-\frac{1}{2\times\frac{1}{2}}\ln\left(1+\frac{t^2}{4}\right)\right\}+D;$$ இங்கு D எதேச்சை மாறிலி

05 05

$$\int f(t)dt=t\left\{\tan^{-1}t-\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{t}{2}\right)\right\}-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{t^2}{4}\right)+D$$

75

(c) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$

$$\int_a^b f(a+b-x)dx=\int_b^a f(y)(-dy)$$ $\because y=a+b-x \Rightarrow dy=-dx$ 05

$$=-\int_b^a f(y)dy$$ $x=a\Rightarrow y=b$
$x=b\Rightarrow y=a$ 05

$$=\int_a^b f(y)dy$$ 05

$$\int_a^b f(a+b-x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

$$I = \int_2^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{5-x}}dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$= \int_2^3 \frac{\sqrt{2+3-x}}{\sqrt{2+3-x}+\sqrt{5-(2+3-x)}}dx$$ 05

$$I = \int_2^3 \frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x}}dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow 2I = \int_2^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x}}dx + \int_2^3 \frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x}}dx$$ 05

$$= \int_2^3 dx$$ 05

$$= [x]_2^3$$

$$2I = 3-2 \Rightarrow I = \frac{1}{2}$$ 05

35

---

16)

$l_1 : 2x + y + 3 = 0,\ l_2 : 11x + 2y + 6 = 0$ ஆகிய கோடுகளிற்கு இடையில் உள்ள கோணங்களின் இருகூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகளைக் கண்டு, அவற்றில் கூர்ங்கோண இருகூறாக்கி $3x + y + 3 = 0$ எனக்காட்டுக. $3x + y + 3 = 0$ எனும் கோட்டில் உள்ள புள்ளி P இல் இருந்து l_1, l_2 ஆகிய கோடுகளிற்கு வரையும் செங்குத்து நீளம் $\sqrt{5}$ அலகுகள் எனின் a, b இன் பெறுமானங்களைக் காண்க. இங்கு $a > 0$ ஆகும்.

P ஐ மையமாகவும் கோடுகள் l_1, l_2 ஆகியவற்றை தொடுகின்றதுமான வட்டம் $S = 0$ எனின் $S \equiv x^2 + y^2 - 10x + 36y + 344$ எனக் காட்டுக.

$l : 4x + 3y + 24 = 0$ என்ற கோடு $S = 0$ ஐ வெட்டும் எனக்காட்டுக.

$S = 0$, $l = 0$ என்பவற்றின் வெட்டுப்புள்ளிகளினூடு செல்லும் எல்லா வட்டங்களின் பொதுச்சமன்பாட்டைக் கண்டு,
அதன் மையத்தின் ஒழுக்கு, கோடு l இற்கு செங்குத்தான நேர்கோடாகும் எனக்காட்டுக.

$l_1 : 2x + y + 3 = 0$

$l_2 : 11x + 2y + 6 = 0$

இருகூறாக்கிகள் $\dfrac{2x+y+3}{\sqrt{4+1}} = \pm \dfrac{11x+2y+6}{\sqrt{121+4}}$ 10

$\Rightarrow 5(2x+y+3) = \pm(11x+2y+6)$

$(+) \Rightarrow x - 3y - 9 = 0$ 05

$(-) \Rightarrow 21x+7y+21=0 \Rightarrow 3x+y+3=0$ [05]

$2x+y+3=0 \Rightarrow$ படித்திறன் (-2)

$3x+y+3=0 \Rightarrow$ படித்திறன் (-3)

இற்கிடையில் உள்ள கூர்ங்கோணம் θ எனின்

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1+m_1 m_2}\right|$$ [05]

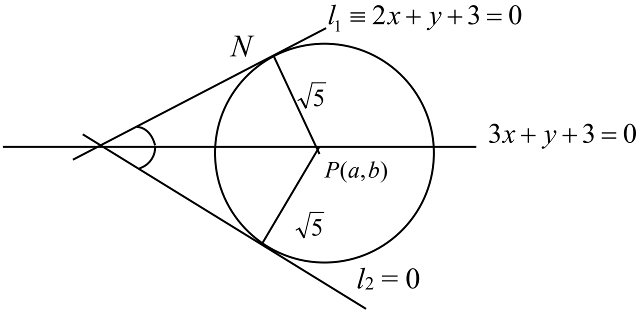
$$= \left|\frac{-2-(-3)}{1+(-2)(-3)}\right|$$

$$\tan\theta = \frac{1}{7} < 1$$ [05]

$\Rightarrow \theta < 45$

$\Rightarrow 2\theta < 90$ [05]

$\therefore\ 3x+y+3=0$ என்பது கூர்ங்கோண இருகூறாக்கி



$3x+y+3=0$

$P(a,b) \Rightarrow 3a+b+3=0$ …………..(1) [05]

$PN = \sqrt{5}$

$\Rightarrow \dfrac{|2a+b+3|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5}$ [05]

$|2a+b+3| = 5$

$2a+b+3 = \pm 5$

$\Rightarrow 2a+b-2=0$ ……………(2) [05]

$\Rightarrow 2a+b+8=0$ ……………(3) [05]

$(1),(2) \Rightarrow a=-5$

$(1),(3) \Rightarrow a=5$ [05]

$a=5$ எனின் $(1) \Rightarrow b=-18$

$\therefore\ a=5, b=-18 \quad (\because a>0)$

$\therefore P \equiv (5,-18)$ [05]

வட்டம் $S=0$ ஆனது ஐ மையமாகவும் $\sqrt{5}$ ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டமாகும்.

$\therefore$ வட்டம் $(x-5)^2 + (y+18)^2 = \sqrt{5}^2$ [10]

$\Rightarrow x^2+y^2-10x+36y+25+324=5$

$\Rightarrow x^2+y^2-10x+36y+344=0$ [05]

$\Rightarrow S=0$

இங்கு $S \equiv x^2 + y^2 - 10x + 36y + 344 = 0$

$S = 0$ இன் ஆரை $r = \sqrt{5}$

$l: 4x + 3y + 24 = 0$ இற்கு $P(5, -18)$ இல் இருந்தான $\perp PN = \dfrac{|4\times 5 + 3\times(-18) + 24|}{\sqrt{16+9}}$ 10

$PN = 2 < r = \sqrt{5}$ 05

05

$\therefore$ $l = 0$ ஆனது $S = 0$ ஐ வெட்டும். 05

$S \equiv x^2 + y^2 - 10x + 36y + 344 = 0, l \equiv 4x + 3y + 24 = 0$ என்பன வெட்டும் புள்ளிகளினூடு செல்லும் வட்டங்களை $S + \lambda l = 0$ என எழுதலாம். இங்கு λ பரமானம். 05

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 10x + 36y + 344 + \lambda(4x + 3y + 24) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2(5 - 2\lambda)x + 3(\lambda + 12)y + (24\lambda + 344) = 0$ 10

மையம் $\left(5 - 2\lambda, -\dfrac{3(\lambda+12)}{2}\right) \equiv \left(\bar{x}, \bar{y}\right)$ என்க

05

$\bar{x} = 5 - 2\lambda$ ……………..(4)

$\bar{y} = -\dfrac{3(\lambda+12)}{2} \Rightarrow 2\bar{y} = -3\lambda - 36$ ……………..(5)

$(4)\times 3 - (5)\times 2 \Rightarrow 3\bar{x} - 4\bar{y} = 87$ 10

$3\bar{x} - 4\bar{y} - 87 = 0$

$\therefore$ மையத்தின் ஒழுக்கு $\left(\bar{x}, \bar{y}\right) \to (x, y)$

$3x - 4y - 87 = 0 \Rightarrow$ படித்திறன் $m_1 = \dfrac{3}{4}$

05

$l: 4x + 3y - 24 = 0 \Rightarrow$ படித்திறன் $m_2 = -\dfrac{4}{3}$

$m_1 m_2 = -1$ 05

$\therefore$ மையத்தின் ஒழுக்கு $l = 0$ இற்கு $\perp$ ஆன நேர்கோடாகும். 05

150

---

(17)

(a) $\sin(A-B), \cos(A-B)$ ஆகியவற்றை $\sin A, \cos A, \sin B, \cos B$ ஆகியவற்றில் எழுதி

$\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1+\tan A \tan B}$ என உய்த்தறிக.

இதிலிருந்து $\tan 5\theta \tan\theta \neq -1, \tan 2\theta \tan\theta \neq -1$ எனக் கொண்டு,

$(1+\tan 2\theta \tan\theta)(\tan 5\theta - \tan\theta) = (1+\tan 5\theta \tan\theta)(\tan 2\theta - \tan\theta)$ ஐ $0 \le \theta \le \pi$ எனும் வீச்சில் தீர்க்க.

(b) முக்கோணி ABC இல் பக்கம் AC இன் நடுப்புள்ளி D ஆனது $BC = BD$ ஆகுமாறுள்ளது. உரிய முக்கோணிகளிற்கு வழக்கமான குறியீடுகளுடன் கோசைன் விதியை உபயோகிப்பதன் மூலம் $\sin A = \dfrac{1}{2c}\sqrt{\dfrac{9a^2-c^2}{2}}$ எனக்காட்டுக.

$a : c = 1 : \sqrt{3}$ எனின் $A = \dfrac{\pi}{6}$ என உய்த்தறிக.

(c) $\tan^{-1}(3x) + \tan^{-1}(2x) = \dfrac{\pi}{4}$ ஐத் தீர்க்க.

இதிலிருந்து $\sin\left[\dfrac{\pi}{4} - \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)\right] = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ எனக்காட்டுக.

a)

$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ 05

$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ 05

$\tan(A-B) = \dfrac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)}$ 05

$\tan(A-B) = \dfrac{\sin A \cos B - \cos A \sin B}{\cos A \cos B + \sin A \sin B}$

$\cos A \cos B$ ஆல் பிரிக்க

$\Rightarrow \tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1+\tan A \tan B}$ 05

$(1+\tan 2\theta \tan\theta)(\tan 5\theta - \tan\theta) = (1+\tan 5\theta \tan\theta)(\tan 2\theta - \tan\theta)$

$\Rightarrow \dfrac{\tan 5\theta - \tan\theta}{1+\tan 5\theta \tan\theta} = \dfrac{\tan 2\theta - \tan\theta}{1+\tan 2\theta \tan\theta}$ 05

$\Rightarrow \tan(5\theta - \theta) = \tan(2\theta - \theta)$ 05

$\tan 4\theta = \tan\theta$

$\Rightarrow 4\theta = n\pi + \theta\ ;\ n \in \mathbb{Z}$ 05

$\theta = \frac{n\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$ 05

$0 \le \theta \le \pi$ இல்

$n = 0 \Rightarrow \theta = 0$

$n = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

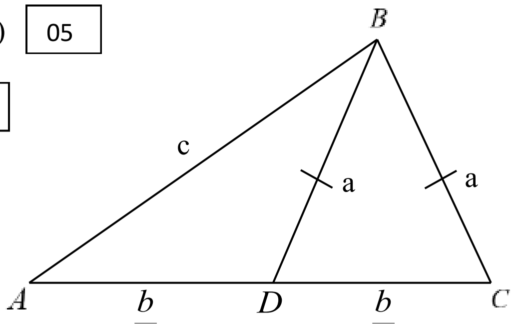
$n = 2 \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$

$n = 3 \Rightarrow \theta = \pi$

$\therefore \theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi$ 10

50

b)



$\cos -$ *Rule*

$\Delta ABC \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ …………..(1) 05

$\Delta ABD \Rightarrow a^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2 - 2.\frac{b}{2}.c\cos A$ 05

$a^2 = \frac{b^2}{4} + c^2 - bc\cos A$ …………..(2)

$(1) - (2) \Rightarrow 0 = \frac{3b^2}{4} - bc\cos A \qquad (\because b \ne 0)$

05

$\frac{4c}{3}\cos A = b$ ஐ (1) இல் இட

$a^2 = \frac{16c^2}{9}\cos^2 A + c^2 - 2 \times \frac{4c}{3}\cos A.c\cos A$ 05

$9a^2 = 9c^2 - 8c^2\cos^2 A$

$= 9c^2 - 8c^2(1 - \sin^2 A)$ 05

$9a^2 - c^2 = 8c^2\sin^2 A$

$\sin^2 A = \frac{9a^2 - c^2}{8c^2}$ 05

$\sin A = \frac{1}{2c}\sqrt{\frac{9a^2 - c^2}{2}} \; (\because \sin A > 0)$ 05

$a : c = 1 : \sqrt{3}$ எனின் $\Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \sqrt{3}a = c$ ஐ இட

$\therefore \sin A = \frac{1}{2\sqrt{3}a}\sqrt{\frac{9a^2 - 3a^2}{2}}$ 05

$\sin A = \frac{1}{2}$ 05

$A = \frac{\pi}{6} \qquad \left(\because 0 < A < \frac{\pi}{2}\right)$ 05

50

c) $\tan^{-1}(3x)+\tan^{-1}(2x)=\frac{\pi}{4}$ ……………..(1)

$\tan^{-1}(3x)=\alpha$, $\tan^{-1}(2x)=\beta$ என்க $\Rightarrow$ $3x=\tan\alpha$, $2x=\tan\beta$ 05

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \tan(\alpha+\beta)=\tan\frac{\pi}{4}$ 05

$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$ 05

$\Rightarrow \frac{3x+2x}{1-3x.2x}=1$

$\Rightarrow 6x^2+5x-1=0$ 05

$(6x-1)(x+1)=0$

$x=\frac{1}{6} or\ x=-1$ 05

$x=-1$ எனின் $L:H:S=\tan^{-1}(-3)+\tan^{-1}(-2)<0$

$R:H:S=\frac{\pi}{4}>0$ 05

$\therefore x=-1$ பொருந்தாது

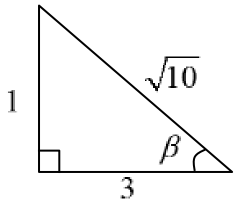
$\therefore x=\frac{1}{6}$ 05

$x=\frac{1}{6}$ ஐ (1) இல் இட

$\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{4}$ 05

$\Rightarrow\left(\frac{\pi}{4}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

$\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\beta$



$\sin\left[\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\sin\beta$ 05

$=\frac{1}{\sqrt{10}}$ 05

50

SLTC

SRI LANKA TECHNOLOGICAL CAMPUS
ශ්‍රී ලංකා තාක්ෂණික විශ්වවිද්‍යාලය
இலங்கை தொழில்நுட்ப பல்கலைக்கழகம்

பல்கலைக்கழக வாழ்க்கையின் உண்மையான அனுபவம்

அரசாங்கத்துடன் இணைந்தது சான்று அங்கீகாரம் பெற்றது† — கல்வி அமைச்சு Ministry of Education

இணங்காணல் அங்கீகாரம் கொண்டது — University Grants Commission (UGC)

ஆராய்ச்சியை அடிப்படையாகக் கொண்டது — ORIS

தலைசிறந்த கல்விப்பீடம்

பல்கலைக்கழகத்தில் தங்குமிட வசதி — SLTC Hub

24/7 திறந்திருக்கும்

School of Engineering

பொறியியல் கற்கைபீடம்

BSc Hons. Eng.

- Electronics and Power Systems†
- Electronics and Telecommunication†
- Electronics and Engineering Management†
- Information and Communication Engineering† (Software Engineering)*
- Civil Engineering
- Mechatronics Engineering†
- Bio Systems Engineering**

பொறியியல் பட்டப்படிப்பு கற்கைநெறிகள்: பௌதிக விஞ்ஞான பாடநெறியில் குறைந்தபட்சம் 3S சித்திகள் (*இரசாயனவியலுக்கு பதிலாக தகவல் தொடர்பாடல் தொழில்நுட்பம் அல்லது உயர் கணிதம்) (**உயிரியல் விஞ்ஞான பாடநெறி பொருந்துமானது)

- IESL அங்கீகாரத்தினை பெற்றுக்கொள்ள (National) 2C 1S / 2B 1C (International)

School of Music

சங்கீதம் கற்கைபீடம்

Bachelor of Music Hons.

முகாமைத்துவப் பட்டப்படிப்பு கற்கைநெறிகள்: வர்த்தகம் / கலை / பௌதிக விஞ்ஞானம் / தகவல் தொடர்பாடல் தொழில்நுட்பம் / உயிரியல் விஞ்ஞானம் / தொழில்நுட்பம் ஆகிய பாடநெறிகளில் ஒன்றில் குறைந்தபட்சம் 3S சித்திகள்

School of Technology

தொழில்நுட்பம் கற்கைபீடம்

BTech Hons.

- Electronics†
- Agricultural Technology†
- Environmental Technology

BSc Textile Technology

- Textile and Clothing Technology
- Fashion Merchandise Management

தொழில்நுட்ப பட்டப்படிப்பு கற்கைநெறிகள்: பௌதிக விஞ்ஞானம் / தகவல் தொடர்பாடல் தொழில்நுட்பம் / உயிரியல் விஞ்ஞானம் / தொழில்நுட்பம் ஆகிய பாடநெறிகளில் ஒன்றில் குறைந்தபட்சம் 3S சித்திகள்

School of Computing & IT

கணணியியல், தகவல் தொழில்நுட்பம் கற்கைபீடம்

BSc Hons. Information Technology

- Software Engineering
- Cloud Computing
- Cybersecurity
- Data Science

முகாமைத்துவப் பட்டப்படிப்பு கற்கைநெறிகள்: வர்த்தகம் / கலை / பௌதிக விஞ்ஞானம் / தகவல் தொடர்பாடல் தொழில்நுட்பம் / உயிரியல் விஞ்ஞானம் / தொழில்நுட்பம் ஆகிய பாடநெறிகளில் ஒன்றில் குறைந்தபட்சம் 3S சித்திகள்

SLTC Business School

முகாமைத்துவம் கற்கைபீடம்

BBM Hons.

- Accounting and Finance†
- Human Resource Management†
- Marketing†
- Supply Chain Management†
- Operations Management†

BSC Hons. Tourism & Hospitality

- E-Tourism & Digital Marketing†
- Travel & Tourism Management†
- Travel & Tourism Management† (General)

முகாமைத்துவப் பட்டப்படிப்பு கற்கைநெறிகள்: வர்த்தகம் / கலை / பௌதிக விஞ்ஞானம் / தகவல் தொடர்பாடல் தொழில்நுட்பம் / உயிரியல் விஞ்ஞானம் / தொழில்நுட்பம் ஆகிய பாடநெறிகளில் ஒன்றில் குறைந்தபட்சம் 3S சித்திகள்

ENTECH

YOUTH EXCELLENCE SCHOLARSHIP

இளம் கல்வியாளர்களின் சிறந்த வெளிப்படுத்தலுக்கான புலமைப் பரிசில்

3A's	A
100% முழுமையான புலமைப்பரிசில்	30% ஒவ்வொரு A சித்திகள்
B	**C**
20% ஒவ்வொரு B சித்திகள்	10% ஒவ்வொரு C சித்திகள்

நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டது

தெற்காசியாவின் மிக துரிதமாக வளர்ந்து வரும் கல்வி நிறுவனத்திற்கான இவ்வாண்டிற்கான விருதுகள்

தெற்காசிய வியாபாரத்தின் உன்னதத்திற்கான விருதுகள் - 2019

Sri Lanka Technological Campus is in partnership with RMIT University Australia/Vietnam, Lancaster University UK, Deakin University Australia and Lincoln University & Auckland University New Zealand for collaborative degree programmes.

www.sltc.ac.lk

0112 100 500

Pirakanth

Photo Copy Centre

School & Office
Stationary Items,
Photo Copy,
Colour Print,
Colour Photo Copy,
Binding, Laminating

55, Palaly Road,
Thirunelvely,
Jaffna

T.P: 077 223 8447
021 221 6828
Viber: 0776616153
Email: grpirakanth@gmail.com

PEARSON
A Pearson Assured organisation

உயர்தரத்தின் பின்னர் சர்வதேசத்தரம் வாய்ந்த இரட்டை டிப்ளோமா

A/L OCTOBER INTAKE

IT + ENGLISH

DITEC DIPLOMA IN INFORMATION TECHNOLOGY | DIE DIPLOMA IN ENGLISH

PEARSON (UK) ASSURED DIPLOMAS இணை சர்வதேசத்தரம் வாய்ந்த டிப்ளோமாக்கள்

- Diploma in Business Management
- Diploma in Hardware & Networking
- Diploma in Computerized Accounting
- Diploma in Software Engineering
- Diploma in Web Engineering
- Diploma in Auto CAD
- Diploma in Graphic Designing
- Diploma In Business English
- Diploma in Academic English
- Diploma in Hospitality Management

காலம் : 4 மாதங்கள்

Graduate by September 2023

STEP INTO A WORLD CLASS **BRITISH DEGREE** THROUGH **PEARSON HND**

BEng (HONS) IN SOFTWARE ENGINEERING

BA (HONS) IN BUSINESS ADMINISTRATION

EDUCATION PATHWAY

- L8 DOCTORAL DEGREE
- L7 MASTER'S [DEGREE]
- L6 FINAL YEAR [DEGREE]
- L4 L5 HIGHER NATIONAL DIPLOMA [HND]
- L3 DIPLOMA
- L2 O/L OR A/L

EARLY BIRD OFFERS AVAILABLE

- **UGC** RECOGNISED
- **FASTEST** PATHWAY TO A BRITISH DEGREE
- **LMU APPROVED** ACADEMIC PANEL

CALL:077 309 9 308

University Partner LONDON METROPOLITAN UNIVERSITY | Kingston University London

Easy PAYMENT OPTIONS are available with

SEYLAN | COMMERCIAL BANK | DFCC BANK | NDB bank

FOR MORE INFORMATION CALL : 021 7 572 572

ESOFT
Shaping Lives, Creating Futures.

ESOFT METRO CAMPUS

No. 137, K.K.S Road, Jaffna | Hotline : 021 222 4142

PLATINUM AWARD WINNER PEARSON ANNUAL AWARDS 2019

20 YEARS ANNIVERSARY

ACHIEVERS®
WHERE THE GOOD BECOMES GREAT

CIMA | ACCA
LEARNING PARTNER APPROVED Gold

ARE YOU FROM

2020 A/L MATHS OR SCIENCE STREAM?

HAVING A PROFESSIONAL QUALIFICATION
WILL BOOST YOUR CAREER IN ANY FIELD

STUDY WORLD LARGEST
PROFESSIONAL QUALIFICATIONS CIMA OR **ACCA**
THROUGH **ACHIEVERS FAST TRACK PROGRAMME**

WE HAVE ORGANIZED A SERIES OF
CAREER GUIDANCE PROGRGAMMES
FOR 2020 A/L MATHS & SCIENCE STREAM
STUDENTS TO EDUCATE ABOUT THE
BENEFITS OF STUDYING CIMA OR ACCA

0768 444 858

ONLINE & PHYSICAL
CAREER GUIDANCE

27th Oct - 10.00am to 12.00pm
29th Oct - 10.00am to 12.00pm
03rd Nov - 10.00am to 12.00pm
07th Nov - 02.00pm to 04.00pm

STUDENTS WHO ATTEND THE CAREER GUIDANCE PROGRAMME WILL GET AN EXCLUSIVE SCHOLARSHIP TO FOLLOW CIMA / ACCA AT ACHIEVERS

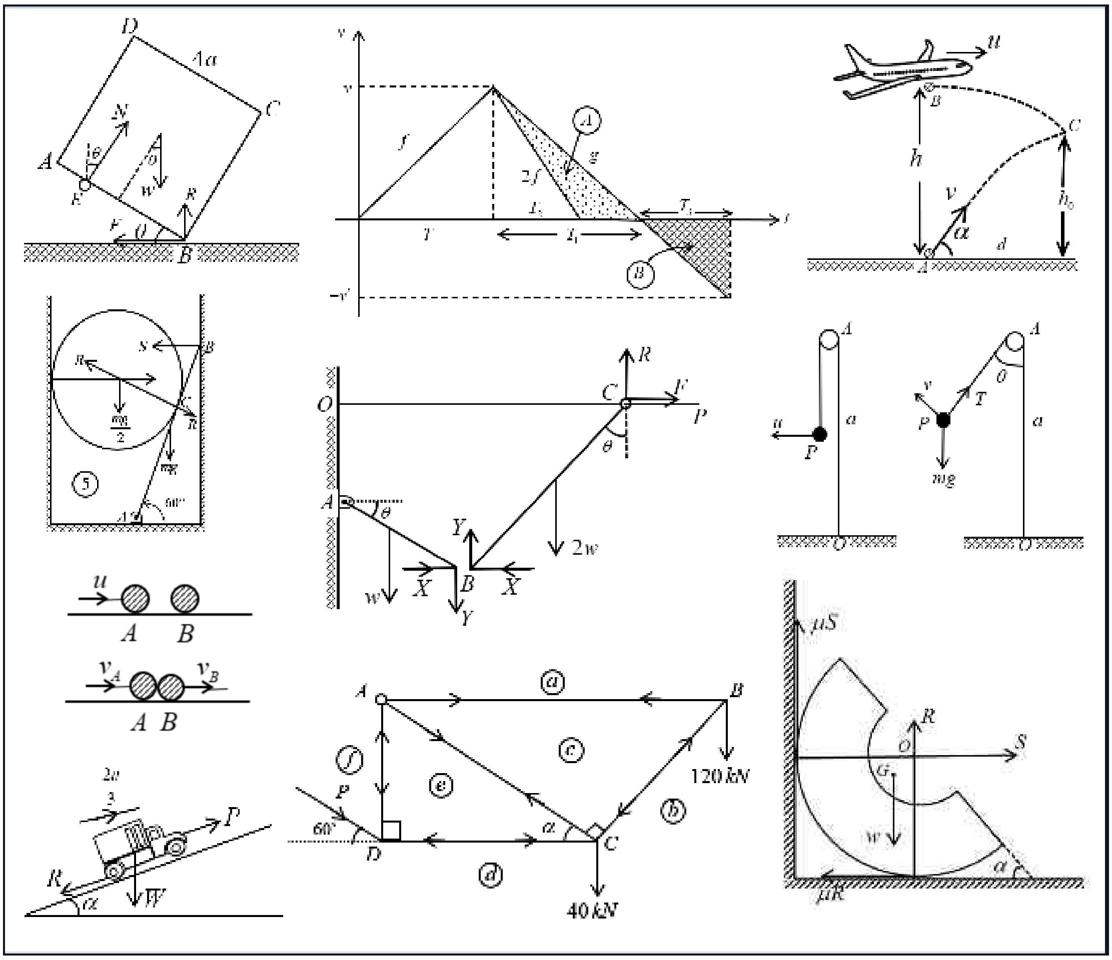
0777 895 900 | 0117 590 001
No. 39, Bauddhaloka Mw, Colombo 04
www.achievers.lk
info@achievers.lk

மொறட்டுவைப் பல்கலைக்கழக பொறியியற் பீட தமிழ் மாணவர்கள் நடாத்தும் க.பொ.த உயர்தர மாணவர்களுக்கான 11வது

முன்னோடிப் பரீட்சை 2020

10(II) - இணைந்தகணிதம் II

விடைகள் (புள்ளியிடும் திட்டம்)



Prepared By

B.Raveendran *B.Sc.*

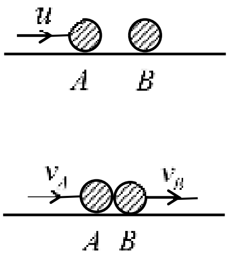
பகுதி A

1. முறையே $4m, m$ திணிவுள்ள இரு பந்துகள் A, B ஆகியன ஒரு ஒப்பமான கிடைமேசை மீது வைக்கப்பட்டு பந்து A யிற்கு B யுடன் மோதுமாறு u கதி வழங்கப்படுகின்றது. பந்துதுகளுக்கு இடையிலான மீளமைவுக் குணகம் e எனின் மோதுகையின் பின்னர் A யின் கதி $\frac{1}{5}(4-e)u$ எனக்காட்டுக. மேலும் மோதுகையின் பின்னர் B யின் கதி A யின் கதியின் இருமடங்கு எனின் $e = \frac{2}{3}$ எனக்காட்டுக.

A, B யிற்கு $I = \Delta(mv)$ இனை பிரயோகிக்க

$0 = 4mv_A + mv_B - 4mu$ (5)

$4v_A + v_B = 4u$ -------------- (i)



நியூட்டனின் பரிசோதனைவிதி :

$v_B - v_A = eu$ ---------------- (ii) (5)

$(i), (ii) \Rightarrow v_A = \frac{1}{5}(4-e)u$ (5) $\quad v_B = \frac{4}{5}(e+1)u$

$v_B = 2v_A$

$\frac{4}{5}(e+1)u = 2 \times \frac{1}{5}(4-e)u$ (5)

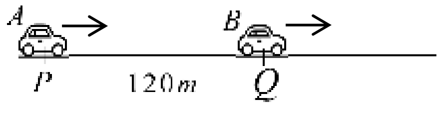
$e = \frac{2}{3}$ (5)

25

2. ஒரு நேர் வீதி வழியே $120m$ இடைத்தூரத்தில் உள்ள இரு புள்ளிகளிகள் P, Q இலிருந்து A, B எனும் இரு கார்கள் முறையே $10ms^{-1}, 5ms^{-1}$ எனும் ஆரம்ப கதிகளுடனும் $f\,ms^{-2}, 2ms^{-2}$ எனும் ஆர்முடுகலுடனும் ஒரே நேரத்தில் $\overrightarrow{PQ}$ வழியே இயங்க ஆரம்பிக்கின்றன. B சார்பாக A யின் இயக்கத்திற்கான வேக-நேர வரைபை வரைக. இதிலிருந்து $6s$ களின் பின்னர் A ஆனது B இனை கடக்கின்றது எனின் f இனைக் காண்க.

$v_{A,E} = \rightarrow 10ms^{-1} \quad v_{B,E} = \rightarrow 5ms^{-1} \quad a_{A,E} = \rightarrow f\,ms^{-2} \quad a_{B,E} = \rightarrow 2\,ms^{-2}$

$v_{A,B} = v_{A,E} + v_{E,B}$



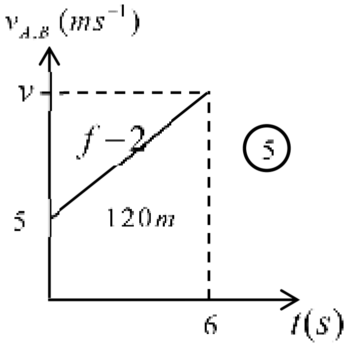
$= \rightarrow 10ms^{-1} + \leftarrow 5ms^{-1}$

$= \rightarrow 5ms^{-1}$ (5)

$a_{A,B} = a_{A,E} + a_{E,B}$

$= \rightarrow (f-2)\ ms^{-2}$ (5)

$\frac{1}{2} \times (5+v) \times 6 = 120$ (5)



(5)

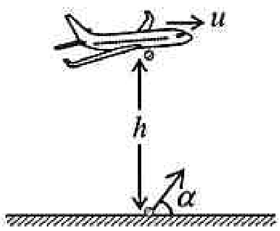
$v = 35ms^{-1}$

$f - 2 = \frac{35-5}{6} \Rightarrow f = 7$ (5)

25

[பக். 2 ஐப் பார்க்க

3. தரையிலிருந்து h உயரத்தில் u கதியுடன் கிடையாக பறந்து செல்லும் விமானம் ஒன்றிலிருந்து பந்து ஒன்று விழவிடப்படுகின்றது. அதேகணத்தில் விமானத்திற்கு நிலைக்குத்தாக கீழே தரைமீதுள்ள புள்ளியிலிருந்து கிடையுடன் α சாய்வில் இன்னோர் பந்து எறியப்படுகின்றது. t நேரத்தின் பின்னர் இரு பந்துகளும் தரைக்கு மேல் உள்ள ஒரு புள்ளியில் மோதுகின்றன எனின் $t=\frac{h}{u}\cot\alpha$ எனக்காட்டுக.



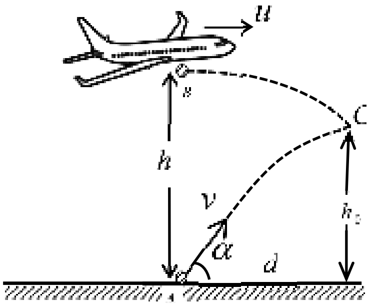
தரையிலிருந்து எறியப்படும் பந்திற்கு :

$A\rightarrow C \quad \rightarrow s=ut \quad \Rightarrow \quad d=v\cos\alpha t$

விமானத்தில் இருந்து விழும் பந்திற்கு :

$B\rightarrow C \quad \rightarrow s=ut \quad \Rightarrow \quad d=ut$

$\therefore v\cos\alpha = u$ ---------------- (i) (5)



தரையிலிருந்து எறியப்படும் பந்திற்கு :

$A\rightarrow C \quad \uparrow s=ut+\frac{1}{2}at^2 \Rightarrow h_0=v\sin\alpha t-\frac{1}{2}gt^2$ ------------- (ii) (5)

விமானத்தில் இருந்து விழும் பந்திற்கு :

$B\rightarrow C \quad \downarrow s=ut+\frac{1}{2}at^2 \Rightarrow h-h_0=\frac{1}{2}gt^2$ --------------------- (iii) (5)

$(ii)+(iii) \Rightarrow t=\frac{h}{v\sin\alpha}$ (5) $\qquad (i) \Rightarrow t=\frac{h}{\frac{u}{\cos\alpha}\sin\alpha}=\frac{h}{u}\cot\alpha$ (5)

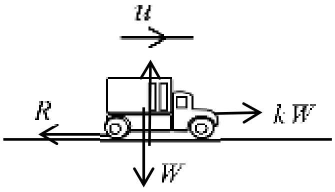
25

4. W நிறையுடைய வாகனம் ஒன்று kW எனும் விசையை உஞற்றி ஒரு கிடைத்தரைமீது u எனும் அதிஉயர் கதியில் இயங்குகின்றது எனின் அதன் எஞ்சின் உஞற்றும் அதி உயர் வலுவிற்கான கோவையை எழுதுக. மேலும் வாகனத்தின் இயக்கத்திற்கு எதிரான தடைவிசை மாறாதிருக்க இவ்வாகனம் $\sin^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)$ சாய்வுள்ள பாதையில் ஏறும்போது அடையும் அதி உயர்கதி $\frac{2u}{3}$ எனின் $k=\frac{1}{5}$ எனக்காட்டுக.

$H=Fv \Rightarrow H=kWu$ (5)

$\rightarrow F=ma$

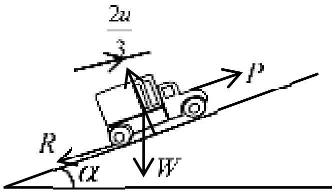
$kW-R=0 \quad \Rightarrow \quad R=kW$ (5)



சாய்தளத்தில் ஏறும்போது

$\nearrow F=ma$

$P-kW-W\sin\alpha=0 \quad \Rightarrow \quad P=\left(k+\frac{1}{10}\right)W$ (5)



$\sin\alpha=\frac{1}{10}$

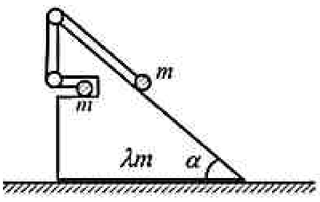
$H=Fv \Rightarrow$

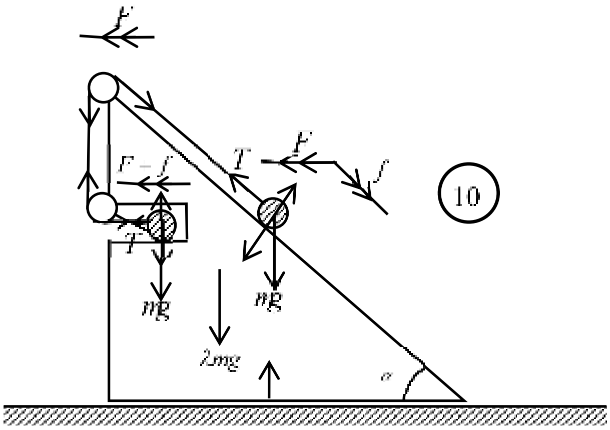
$kWu=\left(k+\frac{1}{10}\right)W\times\frac{2u}{3}$ (5)

$k=\frac{1}{5}$ (5)

25

5. λm திணிவும் α சாய்வுமுள்ள ஆப்பு ஒன்று ஒப்பமான கிடைத்தரைமீது வைக்கப்பட்டுள்ளது. m திணிவுள்ள இரு துணிக்கைகள் ஆப்பின் ஒப்பமான மேற்பரப்புகளில் படத்தில் காட்டப்பட்டவாறு வைக்கப்பட்டு ஒரு இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் முனைகளுக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளன. தொகுதியானது இழைகள் இறுக்கமாக இருக்கப் பிடிக்கப்பட்டு ஓய்விலிருந்து இயங்கவிடப்படும்போது இழையில் உள்ள இழுவையை காண்பதற்குத் தேவையான சமன்பாடுகளை எழுதுக.





(10)

தொகுதிக்கு $\leftarrow F = ma$

$$0 = \lambda mF + m(f + F) + m(F - f\cos\alpha) \quad (5)$$

$$0 = (\lambda + 2)F + (1 - \cos\alpha)f$$

சாய்தளத்தில் உள்ள துணிக்கைக்கு $\searrow F = ma$

$$mg\sin\alpha - T = m(f - F\cos\alpha) \quad (5)$$

m திணிவிற்கு $\leftarrow F = ma$

$$T = m(F + f) \quad (5)$$

25

6. உற்பத்தி O குறித்து A, B, C ஆகிய புள்ளிகளின் தானக்காவிகள் முறையே $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j},\ 2\mathbf{j},\ -(a+1)\mathbf{i} + a\mathbf{j}$ ஆகும். இங்கு $a > 0$ ஆகும். $\measuredangle AOB = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$ எனக்காட்டுக.. மேலும் $\measuredangle AOC = \frac{\pi}{2}$ எனின் a இனைக் காண்க.

$$\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\left|\overrightarrow{OB}\right| = 2$$

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \left|\overrightarrow{OA}\right|.\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\theta$$

$$(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}).2\mathbf{j} = 5 \times 2 \times \cos\theta \quad (10)$$

$$8 = 10\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \measuredangle AOB = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \quad (5)$$

$$A\hat{O}C = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad OA \perp OC$$

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = 0$$

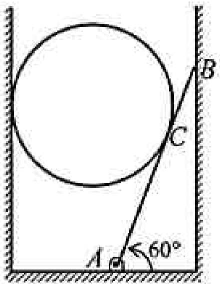
$$\therefore\ (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}).(-(a+1)\mathbf{i} + a\mathbf{j}) = 0 \quad (5)$$

$$-3a - 3 + 4a = 0$$

$$a = 3 \quad (5)$$

25

7. $2a$ நீளமுள்ள m திணிவுள்ள சீரான கோலொன்று A யில் ஒப்பமாக பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. $\frac{m}{2}$ திணிவுள்ள சீரான வட்ட அடர் ஒன்று கோலின்மீது C யில் வைக்கப்பட்டு தொகுதியானது படத்தில் காட்டியவாறு இரு ஒப்பமான சுவர்களுக்கிடையில் சமனிலையில் உள்ளது. AB கிடையுடன் $60°$ அமைக்கின்றது எனவும் $AC=\frac{3a}{2}$ எனவும் தரப்படின் B யில் கோலின்மீது உள்ள மறுதாக்கத்தைக் காண்க.



வட்ட அடரின் சமனிலைக்கு

$$\uparrow \; R\cos 60° = \frac{mg}{2} \quad (5)$$

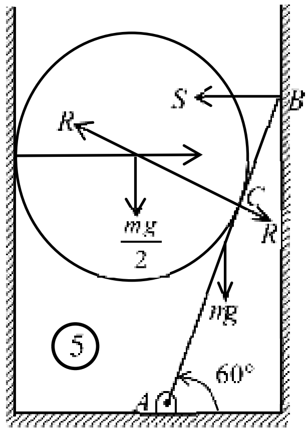
$$R = mg$$

கோலின் சமனிலைக்கு

$$A \circlearrowright \; mg \times a\cos 60° + R \times \frac{3a}{2} - S \times 2a\sin 60° = 0 \quad (10)$$

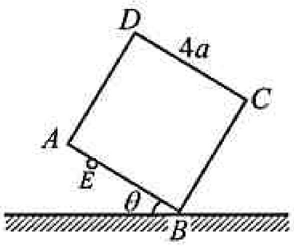
$$mg \times \frac{1}{2} + mg \times \frac{3}{2} = S \times \sqrt{3}$$

$$S = \frac{2mg}{\sqrt{3}} \quad (5)$$



25

8. $4a$ பக்க நீளமுடைய சதுர அடர் ஒன்று படத்தில் காட்டியவாறு உச்சி B ஒரு கரடான கிடைத்தரைமீது இருக்குமாறும் AB ஆனது E எனும் ஒப்பமான முளையை தொட்டுக் கொண்டும் சமனிலையில் உள்ளது. AB கிடையுடன் θ சாய்வில் இருக்கின்றது. $BE=3a$ எனவும் $\tan\theta = 1/3$ எனவும் தரப்பட்டுள்ளது. தரைக்கும் அடருக்கும் இடையிலான உராய்வுக் குணகம் μ எனின் சமனிலைக்கு $\mu \geq \frac{2}{9}$ எனக்காட்டுக.



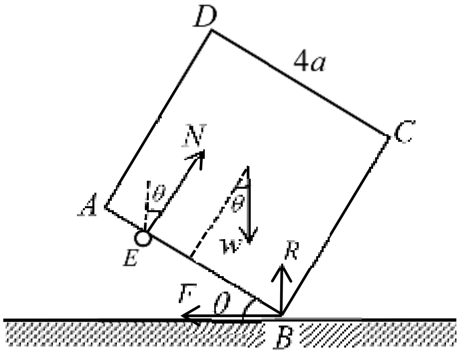
சதுர அடரின் சமனிலைக்கு

$$B \circlearrowright \quad N\times 3a - w\cos\theta \times 2a + w\sin\theta \times 2a = 0 \quad (5)$$

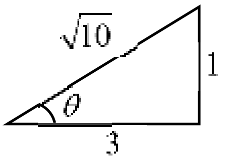
$$N = \frac{2w}{3}(\cos\theta - \sin\theta) = \frac{4w}{3\sqrt{10}}$$

$$\rightarrow N\sin\theta = F = \frac{4w}{3\sqrt{10}} \times \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{2w}{15} \quad (5)$$

$$\uparrow N\cos\theta + R - w = 0 \quad (5)$$



$$R = w - \frac{4w}{3\sqrt{10}} \times \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3w}{5} \quad (5)$$



$$\frac{F}{R} = \frac{2w/15}{3w/5} = \frac{2}{9}$$

சமனிலைக்கு $\frac{F}{R} \leq \mu \;\Rightarrow\; \mu \geq \frac{2}{9}$ (5)

25

9. A, B ஆகியன இரு சாரா நிகழ்ச்சிகள் எனவும் $P(A)=0.2,\ P(A\cup B)=0.6$ எனவும் தரப்பட்டுள்ளன. $P(B)$ இனைக் கண்டு $P(A|B'),\ P(B'|A')$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

A, B ஆகியன சாரா நிகழ்ச்சிகள் $\Rightarrow\quad P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$0.6=0.2+P(B)-0.2\times P(B)\quad (5)$$

$$P(B)=\frac{1}{2}\quad (5)$$

$$P(A|B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)}\quad (5)$$

$$=\frac{0.2-0.2\times 0.5}{0.5}=\frac{1}{5}\quad (5)$$

$$P(B'|A')=\frac{P(B'\cap A')}{P(A')}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(A)}$$

$$=\frac{1-0.6}{0.8}=\frac{1}{2}\quad (5)$$

25

10. வைத்தியசாலை ஒன்றில் 30 நாட்களாக கொரோனா தொற்றாளர்களின் எண்ணிக்கை பதியப்பட்டு அதன் இடை μ, மாறற்றிறன் σ^2 ஆகியன முறையே $28, 16$ என கணிக்கப்பட்டது. பதிவுகளில் ஏற்பட்ட வழு காரணமாக குறித்த இரு தினங்களில் $45, 26$ என பதியப்பட்டிருந்த தொற்றாளர்களின் எண்ணிக்கை $35, 36$ என திருத்தப்பட்டது. திருத்தப்பட்ட μ, σ^2 ஆகியவற்றைக் காண்க.

$$\mu=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$\mu_{new}=\frac{30\times 28-45-26+35+36}{30}=28\quad (10)$$

$$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\mu^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)_{old}=30\times 16+30\times 28^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)_{new}=30\times 16+30\times 28^2-45^2-26^2+35^2+36^2\quad (10)$$

$$=30\times 16+30\times 28^2-180$$

$$\sigma^2_{new}=\frac{30\times 28^2+30\times 16-180}{30}-28^2$$

$$=28^2+16-6-28^2$$

$$=10\quad (5)$$

25

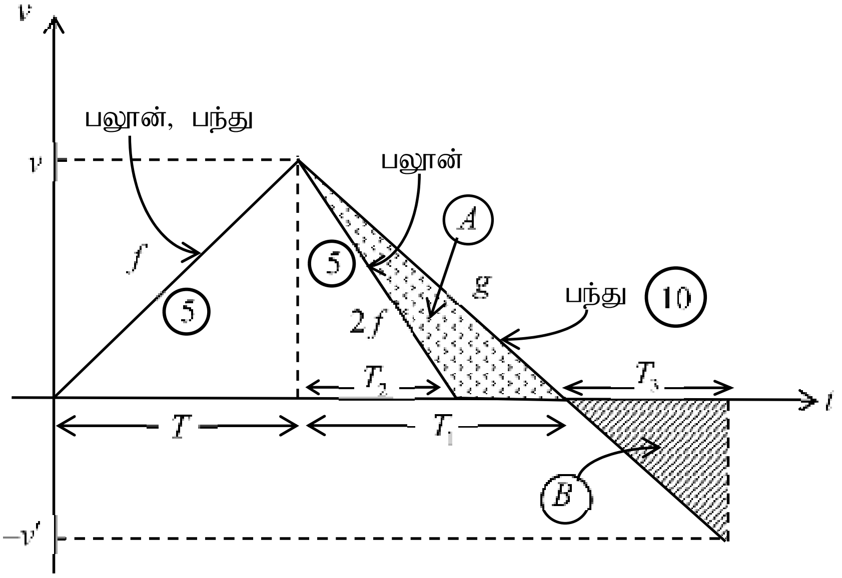
பகுதி *B*

11. (a) $t=0$ இல் ஓய்விலிருந்து இயங்க ஆரம்பிக்கும் பலூன் ஒன்று தரையிலிருந்து மேல்நோக்கி $f\left(<\frac{g}{2}\right)$ எனும் ஆர்முடுகலுடன் பயணிக்கின்றது. நேரம் $t=T$ இல் பலூனிலிருந்து பந்து ஒன்று மெதுவாக விழவிடப்படுகின்றது. பந்து விழவிடப்பட்ட கணத்திலிருந்து பலூனானது $2f$ எனும் அமர்முடுகலுடன் இயங்கி ஓய்வுக்கு வந்து வளியில் நிலையாக மிதக்கின்றது. பந்தானது புவியீர்ப்பின்கீழ் இயங்கி பலூன் ஓய்வடைந்து சிறிது நேரத்தின் பின்னர் மீண்டும் பலூனை அடைகின்றது. பந்து, பலூன் ஆகியவற்றின் இயக்கங்களுக்கான வேக-நேர வரைபுகளை ஒரே படத்தில் வரைக.

(i) பந்தானது தரைக்கு மேல் அடையும் அதிஉயர் உயரம் $\frac{fT^2}{2g}(f+g)$ எனக்காட்டுக.

(ii) பந்தானது அதி உயர் புள்ளியை அடையும்போது பந்திற்கும் பலூனிற்கும் இடையிலான தூரம் $\frac{fT^2}{4g}(2f-g)$ எனக்காட்டுக.

(iii) நேரம் $t=T\left(1+\frac{f}{g}+\frac{\sqrt{2f(2f-g)}}{2g}\right)$ இல் பந்து மீண்டும் பலூனை அடைகின்றது எனக்காட்டுக.



(i) $\quad f=\frac{v}{T}\Rightarrow v=fT$ (5)

$g=\frac{v}{T_1}\Rightarrow T_1=\frac{fT}{g}$ (5)

பந்து அடையும் அதிஉயர் உயரம் $=\frac{1}{2}(T+T_1)\times v=\frac{1}{2}\left(T+\frac{fT}{g}\right)\times fT$ (5)

$=\frac{fT^2}{2g}(f+g)$ (5)

(ii) $\quad 2f=\frac{v}{T_2}\Rightarrow T_2=\frac{T}{2}$ (5)

பந்திற்கும் பலூனிற்கும் இடையிலான தூரம் = பரப்பு A

பரப்பு (A) $= \frac{1}{2} \times (T_1 - T_2) \times v$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{fT}{g} - \frac{T}{2}\right) \times fT$ (5)

$= \frac{fT^2}{4g}(2f - g)$ (5)

(iii) பந்து பாலூனை அடையும்போது பரப்பு (A) = பரப்பு (B)

$g = \frac{v'}{T_3} \Rightarrow v' = gT_3$ (5)

$\frac{fT^2}{4g}(2f - g) = \frac{1}{2} \times T_3 \times gT_3$ (5)

$T_3 = \frac{T}{2g}\sqrt{2f(2f - g)}$ (5)

மொத்தநேரம் $= T + T_1 + T_3$

$= T + \frac{fT}{g} + \frac{T}{2g}\sqrt{2f(2f - g)}$ (5)

$= T\left(1 + \frac{f}{g} + \frac{\sqrt{2f(2f - g)}}{2g}\right)$ (5)

80

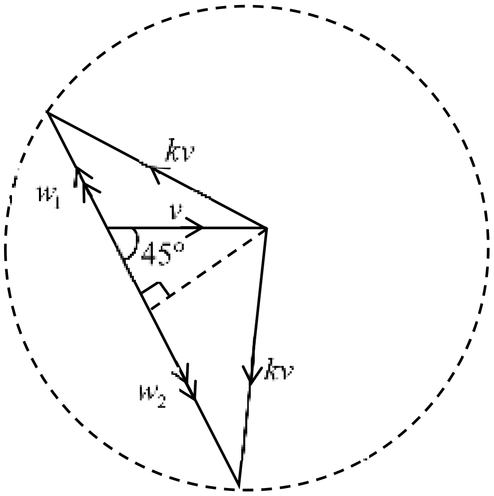
(b) S எனும் கப்பலானது மேற்கு நோக்கி v கதியுடன் செல்கின்றது. $kv(k > 1)$ எனும் கதியுடன் பயணிக்கவல்ல B எனும் படகானது S இலிருந்து புறப்பட்டு எப்பொழுதும் S இற்கு வடமேற்காக இருக்குமாறு S இலிலிருந்து d தூரத்திற்கு சென்று பின்னர் மீண்டும் S இனை அடைகின்றது. B யினது S இலிலிருந்து வெளிநோக்கிய, S இனை நோக்கிய பயணங்களின்போது S சார்பாக B யின் இயக்கத்திற்கான வேக முக்கோணிகளை ஒரே படத்தில் வரைக. இதிலிருந்து B ஆனது S இலிருந்து வெளிநோக்கி செல்லும் போது S சார்பாக B யின் கதி $\frac{v}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2k^2 - 1} - 1\right)$ எனக்காட்டி B யின் S இனை நோக்கிய பயணத்தின்போது S சார்பாக B யின் கதியை காண்க. B யானது S இலிருந்து வெளிநோக்கி, S இனை நோக்கி பயணித்த நேரங்கள் முறையே T_1, T_2 எனின் $\frac{T_1}{T_2} = \frac{k^2 + \sqrt{2k^2 - 1}}{k^2 - 1}$ எனக்காட்டுக. மேலும் B இனது மொத்த பிரயாண நேரம் T எனின் $d = \frac{(k^2 - 1)vT}{\sqrt{2(2k^2 - 1)}}$ எனக்காட்டுக.

$V_{S,E} = \leftarrow v$ $\quad V_{B,E} = kv$

$V_{B,S} = V_{B,E} + V_{E,S}$

S இலிருந்து வெளிநோக்கிய இயக்கத்தின்போது : $\nwarrow w_1 = kv + \rightarrow v$ (5)

S இனை நோக்கிய இயக்கத்தின்போது : $\searrow w_2 = kv + \rightarrow v$ (5)



(20)

$$w_1 = \sqrt{k^2v^2 - (v\sin 45°)^2} - v\cos 45° = \sqrt{k^2v^2 - \frac{v^2}{2}} - \frac{v}{\sqrt{2}} = \frac{v}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2k^2-1}-1\right)$$ (5)

$$w_2 = \sqrt{k^2v^2 - (v\sin 45°)^2} + v\cos 45° = \sqrt{k^2v^2 - \frac{v^2}{2}} + \frac{v}{\sqrt{2}} = \frac{v}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2k^2-1}+1\right)$$ (5)

$$d = w_1T_1 = w_2T_2$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{w_2}{w_1} = \frac{\sqrt{2k^2-1}+1}{\sqrt{2k^2-1}-1}$$ (5)

$$= \frac{\left(\sqrt{2k^2-1}+1\right)^2}{\left(2k^2-1\right)-1}$$

$$= \frac{k^2+\sqrt{2k^2-1}}{k^2-1}$$ (5)

$$T = T_1 + T_2$$

$$T = \frac{k^2+\sqrt{2k^2-1}}{k^2-1}T_2 + T_2$$ (5)

$$T_2 = \frac{\left(k^2-1\right)}{2k^2-1+\sqrt{2k^2-1}}T$$ (5)

$$d = w_2T_2$$

$$= \frac{v}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2k^2-1}+1\right).\frac{\left(k^2-1\right)}{2k^2-1+\sqrt{2k^2-1}}T$$ (5)

$$= \frac{v}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2k^2-1}+1\right).\frac{\left(k^2-1\right)}{\sqrt{2k^2-1}\left(\sqrt{2k^2-1}+1\right)}T$$

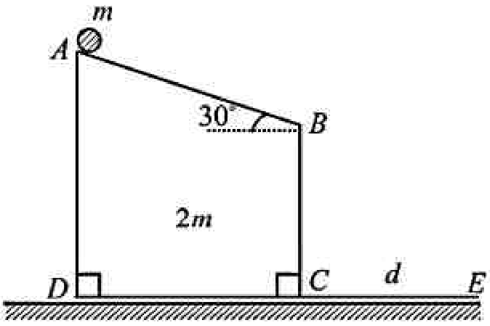
$$= \frac{\left(k^2-1\right)vT}{\sqrt{2\left(2k^2-1\right)}}$$ (5)

70

150

[பக். 9 ஐப் பார்க்க

12. (*a*) $ABCD$ ஆனது $2m$ திணிவுள்ள ஆப்பு ஒன்றின் அதி உயர் சாய்வு கோட்டின் வழியேயான குறுக்குவெட்டுமுகமாகும். d நீளமான இலேசான மெல்லிய பலகை CE ஆனது ஆப்புடன் இணைக்கப்பட்டு ஆப்பானது DCE ஒரு ஒப்பமான கிடைத்தரைமீது இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. கிடையுடன் $30°$ அமைக்கும் ஆப்பின் ஒப்பமான முகம் AB மீது A யில் m திணிவுள்ள துணிக்கை ஓய்வில் பிடிக்கப்பட்டு விடப்படுகின்றது. AB மீதான இயக்கத்தின்போது ஆப்பு சார்பாக துணிக்கையின் ஆர்முடுகலின் பருமன் $\frac{2g}{3}$ எனவும் ஆப்பினால் துணிக்கைக்கு வழங்கப்படும் மறுதாக்கம் $\frac{4\sqrt{3}}{9}mg$ எனவும் காட்டுக.



மேலும் $AB = 3a,\ BC = \frac{3a}{2}$ எனவும் தொடரும் இயக்கத்தில் துணிக்கையானது பலகை CE மீது விழுகின்றது எனவும் தரப்படின் ஆப்பு சார்பாக துணிக்கையின் இயக்கத்தை கருதுவதன் மூலம் $d \geq \sqrt{3}a$ எனக்காட்டுக.

$W -$ ஆப்பு $\quad P -$ துணிக்கை

$a_{W,E} = \leftarrow F \quad a_{P,W} = \searrow f \quad a_{P,E} = \searrow f + \leftarrow F$

தொகுதிக்கு $\leftarrow F = ma$

$$0 = 2mF + m(F - f\cos 30°) \quad (5)$$

$$3F = f\cos 30° \text{ --------- } (i)$$

துணிக்கைக்கு $\searrow F = ma$

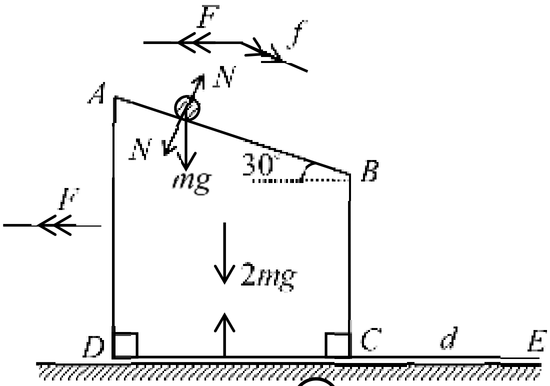
$$mg\sin 30° = m(f - F\cos 30°) \quad (5)$$

$$(i) \Rightarrow g\sin 30° = f - \frac{f}{3}\cos^2 30°$$

$$g\sin 30° = f - \frac{f}{3}\times\frac{3}{4}$$

$$f = \frac{2g}{3} \quad (5)$$

$$F = \frac{g}{3\sqrt{3}} \quad (5)$$



விசைகள் $-$ (5)

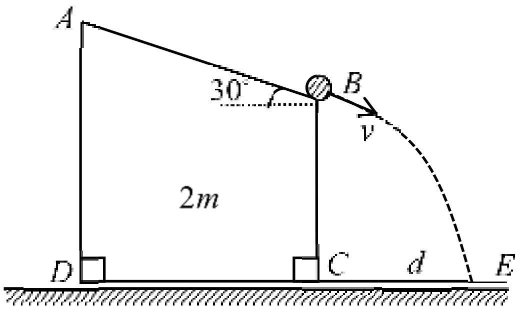
ஆர்முடுகல்கள் $-$ (5)

துணிக்கைக்கு $\nearrow F = ma$

$$N - mg\cos 30° = m(-F\sin 30°) \quad (10)$$

$$N = mg\times\frac{\sqrt{3}}{2} - mg\times\frac{1}{3\sqrt{3}}\times\frac{1}{2}$$

$$N = \frac{4\sqrt{3}}{9}mg \quad (5)$$



$A \to B$ ஆப்புசார்பாக துணிக்கைக்கு $\searrow v^2 = u^2 + 2as$

$$v^2 = 0 + 2 \times \frac{2g}{3} \times 3a \quad (5)$$

$$v = 2\sqrt{ag} \quad (5)$$

B யை அடைந்தபின்னர்,

ஆப்பு சார்பாக துணிக்கையின் ஆர்முடுகல் $= \downarrow g$

P ஆனது CE இனை அடையும் வரையான இயக்கத்திற்கு :

ஆப்பு சார்பாக துணிக்கைக்கு $\downarrow v^2 = u^2 + 2as$

$$v_1^{\,2} = \left(2\sqrt{ag}\sin 30°\right)^2 + 2 \times g \times \frac{3a}{2} \quad (5)$$

$$= 4ag$$

$$v_1 = 2\sqrt{ag} \quad (5)$$

ஆப்பு சார்பாக துணிக்கைக்கு $\downarrow v = u + at$

$$v_1 = v\sin 30° + gt \quad (5)$$

$$2\sqrt{ag} = \sqrt{ag} + gt$$

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \quad (5)$$

ஆப்பு சார்பாக துணிக்கைக்கு $\to s = ut$

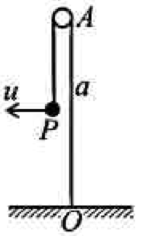
$$s = 2\sqrt{ag}\ \cos 30° \times \sqrt{\frac{a}{g}} \quad (5)$$

$$s = \sqrt{3}a \quad (5)$$

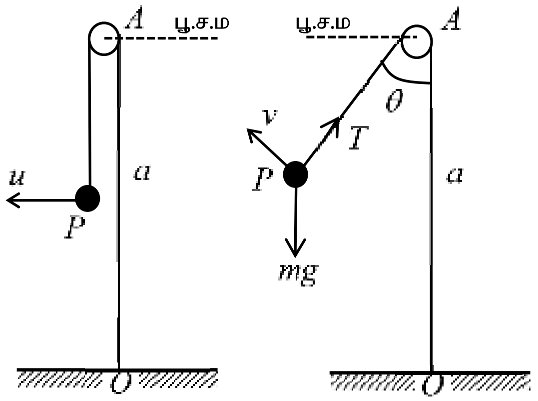
பலகையின் மீது விழுவதால் $s \le d \Rightarrow d \ge \sqrt{3}a$ (5)

90

(b) $\frac{3a}{2}$ நீளமுள்ள நீளா இழை ஒன்றின் ஒரு முனை கிடைத்தரை மீது உள்ள ஒரு புள்ளி O இற்கு இணைக்கப்பட்டு இழையின் மறுமுனைக்கு m திணிவுள்ள துணிக்கை P இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழையானது படத்தில் காட்டியவாறு O இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே a தூரத்தில் உள்ள A எனும் ஒப்பமான முளையின் மேலாக செல்கின்றது. P ஆனது இழையின் பகுதிகள் இறுக்கமாகவும் நிலைக்குத்தாகவும் இருக்க சமனிலையில் உள்ளபோது துணிக்கைக்கு கிடையாக u வேகம் வழங்கப்படுகின்றது. AP கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் θ கோணம் அமைக்கும்போது இழையில் உள்ள இழுவை $\frac{m}{a}\left(2u^2 - ag(2 - 3\cos\theta)\right)$ எனக்காட்டுக. தொடரும் இயக்கத்தில் இழை நிலைக்குத்தாக உள்ளபோது இழைக்கும் முளைக்கும் இடையிலான தொடுகை இல்லாது போனபின் P ஆனது O இனை மையமாகக் கொண்ட வட்டப்பாதையில் இயங்குகின்றது. இழைக்கும் முளைக்கும் இடையிலான தொடுகை நீங்குவதற்கு சற்று முன்னரும் சற்றுப் பின்னரும் இழையில் உள்ள இழுவைகளுக்கு இடையிலான விகிதம் $5:1$ எனின் $u^2 = 5ag$ எனக்காட்டுக.



P யிற்கு சக்திக்காப்பு தத்துவத்தை பயன்படுத்த :



$$\frac{1}{2}mu^2 - mg\frac{a}{2} = \frac{1}{2}mv^2 - mg\frac{a}{2}\cos\theta \quad (10)$$

$$v^2 = u^2 - ag(1-\cos\theta) \quad (5)$$

துணிக்கை P யிற்கு $\nearrow F = ma$

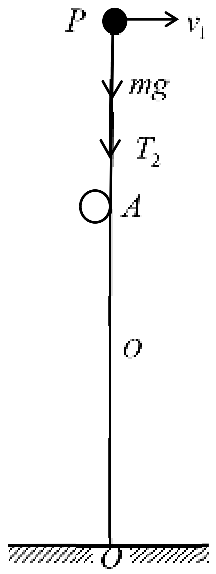
$$T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{a/2} \quad (5)$$

$$T = \frac{2m}{a}\left(u^2 - ag\left(1-\cos\theta\right)\right) + mg\cos\theta$$

$$T = \frac{m}{a}\left(2u^2 - ag\left(2-3\cos\theta\right)\right) \quad (5)$$

இழை நிலைக்குத்தாக இருக்கும் போது $\theta = \pi$ ஆகும்.

$$\theta = \pi \;\Rightarrow\; v_1 = u^2 - ag(1-\cos\pi) = u^2 - 2ag \quad (5)$$



முளையுடன் தொடுகையில் இருக்கும்போது இழுவை

$$T_1 = \frac{m}{a}\left(2u^2 - ag\left(2-3\cos\pi\right)\right)$$

$$T_1 = \frac{m}{a}(2u^2 - 5ag) \quad (5)$$

தொடுகை நீங்கி சற்றுப் பின்

$$\downarrow F = ma$$

$$T_2 + mg = \frac{m}{3a/2}(u^2 - 2ag) \quad (10)$$

$$= \frac{2m}{3a}(u^2 - 2ag)$$

$$T_2 = \frac{m}{3a}(2u^2 - 7ag) \quad (5)$$

$$T_1 = 5T_2$$

$$\frac{m}{a}(2u^2 - 5ag) = \frac{5m}{3a}(2u^2 - 7ag) \quad (5)$$

$$6u^2 - 15ag = 10u^2 - 35ag$$

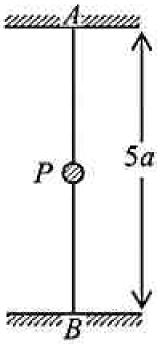
$$u^2 = 5ag \quad (5)$$

60

150

[பக். 12 ஐப் பார்க்க

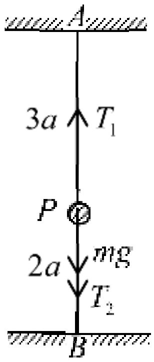
13. $2a$ இயற்கை நீளமும் λmg மீள்தன்மை மட்டும் உடைய இழை AP இன் ஒரு முனை A சீலிங்கிற்கும் மறுமுனை m திணிவுள்ள துணிக்கை P இற்கும் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. a இயற்கை நீளமும் mg மீள்தன்மை மட்டும் உடைய இன்னோர் இழை BP இன் ஒரு முனை B கிடைத்தரைக்கும் மறுமுனை P இற்கும் இணைக்கப்பட்டு APB நிலைக்குத்தாக ஒரு நேர்கோட்டிலிருக்குமாறும் $AB = 5a$ ஆகுமாறும் உள்ளது. சமனிலையில் $AP = 3a$ எனின் $\lambda = 4$ எனக்காட்டுக.



P ஆனது $AP = 2a$ ஆகுமாறு பிடிக்கப்பட்டு கீழ்நோக்கி $3\sqrt{ag}$ கதியுடன் எறியப்படுகின்றது. $AP = x$ ஆக இருக்கும்போது $\ddot{x} = -\frac{3g}{a}(x-3a)$ எனக்காட்டுக. இங்கு $2a \le x \le 4a$ ஆகும். இச்சமன்பாடு $\ddot{X} = -\omega^2 X$ எனும் வடிவில் எடுத்துரைக்கப்படலாம் எனக்காட்டுக. இங்கு $X = x - 3a,\ \omega^2 = \frac{3g}{a}$ ஆகும். $\dot{X}^2 = \omega^2(A^2 - X^2)$ எனும் சமன்பாட்டை பிரயோகித்து $5a \le X \le 7a$ இல் துணிக்கையின் வீச்சத்தைக் காண்க. மேலும் துணிக்கை எறியப்பட்டதிலிருந்து $\frac{\pi}{9}\sqrt{\frac{3a}{g}}$ நேரத்தின் பின்னர் இழை BP தொய்வடையும் எனக்காட்டுக.

இழை BP தொய்யும்போது அவ் இழையானது வெட்டப்படுகின்றது. தொடரும் இயக்கத்தில் x ஆனது $\ddot{x} = -\frac{2g}{a}\left(x - \frac{5a}{2}\right)$ இனைத் திருப்தி செய்யும் எனக்காட்டுக. மேலும் துணிக்கையானது $\sqrt{ag}$ எனும் கதியுடன் தரையை அடிக்கும் எனக்காட்டுக. தரையுடனான மோதுகையால் துணிக்கை P கணநிலை ஓய்வுக்கு வருகின்றது எனின் தரையை மோதி $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2g}{a}}$ நேரத்தின் பின்னர் P மட்டுமட்டாக சீலிங்கை அடையும் எனக்காட்டுக.

துணிக்கையின் சமனிலைக்கு



(5)

$$\downarrow mg + T_2 - T_1 = 0$$

$$mg + \frac{mga}{a} - \frac{\lambda mga}{2a} = 0 \quad (10)$$

$$\lambda = 4 \quad (5)$$

$AP = x$ ஆக இருக்கும்போது துணிக்கை P யிற்கு $\downarrow F = ma$

$$mg + T_4 - T_3 = m\ddot{x}$$

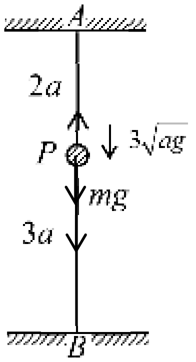
$$mg + \frac{mg}{a}(5a - x - a) - \frac{4mg}{2a}(x - 2a) = m\ddot{x} \quad (10)$$

$$\ddot{x} = -\frac{3g}{a}(x - 3a) \quad (5)$$

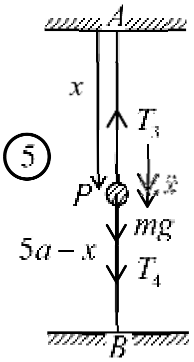
$$X = x - 3a \Rightarrow \dot{X} = \dot{x}, \quad \ddot{X} = \ddot{x} \quad (5)$$

$$\ddot{X} = -\frac{3g}{a}x \quad (5)$$

$$\ddot{X} = -\omega^2 x \quad ; \quad \omega^2 = \frac{3g}{a}$$



(5)



[பக். 13 ஐப் பார்க்க

$\dot{X}^2 = \omega^2(A^2 - X^2)$

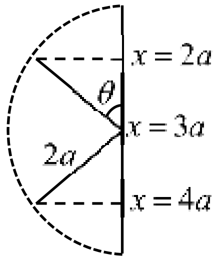
$x = 2a \Rightarrow \dot{X} = 3\sqrt{ag}, \quad X = -a$ (5)

$$9ag = \frac{3g}{a}(A^2 - a^2)$$

$$A = 2a$$ (5)

P யின் இயக்கத்தின் அலைவு மையம் $\ddot{X} = 0$ இல் பெறப்படும்.

$\Rightarrow$ அலைவு மையம் $x = 3a$ இல் இருக்கும். (5)



$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ (5)

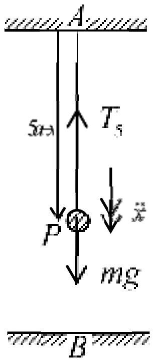
$\therefore$ இழை BP தொய்ய எடுக்கும் நேரம் $= \frac{\pi - 2\theta}{\omega}$ (5)

$$= \sqrt{\frac{a}{3g}} \times \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\pi}{9}\sqrt{\frac{3a}{g}}$$ (5)

$x = 4a$ இல் துணிக்கையின் கதி

$\dot{X} = \dot{x} = 3\sqrt{ag}$ (5)



$AP = x$ ஆக இருக்கும்போது துணிக்கை P யிற்கு 2 a

$$mg - \frac{4mg}{2a}(x - 2a) = m\ddot{x}$$ (10)

$$\ddot{x} = -\frac{2g}{a}\left(x - \frac{5a}{2}\right)$$ (5)

$Y = x - \frac{5a}{2}$ என்க. $\Rightarrow \dot{Y} = \dot{x}, \ \ddot{Y} = \ddot{x}$

$\ddot{Y} = -\Omega^2 Y \quad ; \quad \Omega^2 = \frac{2g}{a}$ (5)

$\dot{Y}^2 = \Omega^2(A_1^2 - Y^2)$

$x = 4a \Rightarrow Y = \frac{3a}{2}, \ \dot{Y} = 3\sqrt{ag}$

$$\left(3\sqrt{ag}\right)^2 = \frac{2g}{a}\left(A_1^2 - \frac{9a^2}{4}\right)$$ (5)

$$A_1 = \frac{3\sqrt{3}a}{2}$$ (5)

$x = 5a \Rightarrow Y = \frac{5a}{2}$

$$\dot{Y}^2 = \frac{2g}{a}\left(\frac{27a^2}{4} - \left(\frac{5a}{2}\right)^2\right)$$ (5)

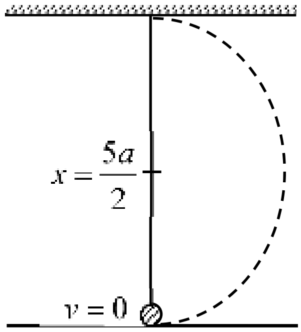
$$\dot{Y} = \sqrt{ag}$$ (5)

[பக். 14 ஐப் பார்க்க

இழை அறுந்த பின்னரான இயக்கத்தின் அலைவு மையம் $\ddot{Y}=0$ இல் பெறப்படும்.

$\Rightarrow$ அலைவு மையம் $x=\dfrac{5a}{2}$ இல் இருக்கும். (5)

துணிக்கை தரையை மோதி கணநிலை ஓய்வுக்கு வருவதால்,



$$\dot{Y}^2=\Omega^2(A_2^2-Y^2)$$

$$x=5a \Rightarrow Y=\frac{5a}{2},\ \dot{Y}=0$$

$$\therefore A_2=\frac{5a}{2} \quad (5)$$

$$x=0 \Rightarrow Y=-\frac{5a}{2} \Rightarrow \dot{Y}=0 \quad (5)$$

$\therefore$ துணிக்கை சீலிங்கை மட்டு மட்டாக அடையும்.

சீலிங்கை அடைய எடுக்கும் நேரம் $=\dfrac{\pi}{\Omega}$ (5)

$$=\sqrt{\frac{a}{2g}}\times\pi$$

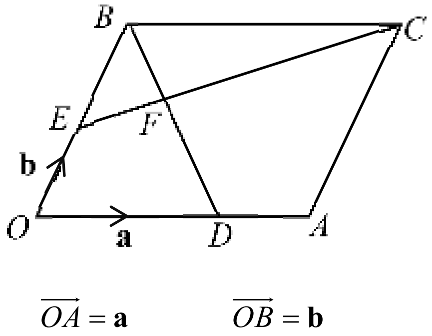
$$=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2a}{g}} \quad (5)$$

150

14. (*a*) $OACB$ ஆனது ஓர் இணைகரம் ஆகும். D ஆனது OA மீது $OD:DA=2:1$ ஆகுமாறு உள்ளது. E ஆனது OB இன் நடுப்புள்ளி ஆகும். CE, BD ஆகியன F இல் சந்திக்கின்றன. $\overline{OA}=\mathbf{a}, \overline{OB}=\mathbf{b}$ எனத்தரப்படின் $\overline{BD}, \overline{CE}$ ஆகியவற்றைக் காண்க. $\overline{FE}=\lambda\overline{CE}, \overline{BF}=\mu\overline{BD}$ எனத்தரப்படின் λ, μ ஆகியவற்றைக் காண்க. $\overline{BD}, \overline{CE}$ ஆகியன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை எனின் $4|\mathbf{a}|^2-4(\mathbf{a}.\mathbf{b})-3|\mathbf{b}|^2=0$ எனக்காட்டுக. இதிலிருந்து

(*i*) $OACB$ ஓர் சாய்சதுரம் எனின் $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ஆகியவற்றுக்கு இடையிலான கோணத்தைக் காண்க.

(*ii*) $OACB$ ஓர் செவ்வகம் எனின் $|\mathbf{a}|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}|\mathbf{b}|$ எனக்காட்டுக.



$\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$

[பக். 15 ஐப் பார்க்க

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD}$

$= \overrightarrow{BO} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$ (5)

$= -\mathbf{b} + \frac{2}{3}\mathbf{a}$ (5)

$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE}$

$= \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BO}$ (5)

$= -\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}$ (5)

$\overrightarrow{FE} = \lambda\overrightarrow{CE}, \quad \overrightarrow{BF} = \mu\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FE}$

$\overrightarrow{BE} = \mu\overrightarrow{BD} + \lambda\overrightarrow{CE}$

$-\frac{1}{2}\mathbf{b} = \mu\left(-\mathbf{b} + \frac{2}{3}\mathbf{a}\right) + \lambda\left(-\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}\right)$ (5)

$\left(\frac{2}{3}\mu - \lambda\right)\mathbf{a} + \left(\frac{1}{2} - \mu - \frac{\lambda}{2}\right)\mathbf{b} = \mathbf{0}$

$\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}, \ \mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ (சமாந்தரமற்ற காவிகள்) $\Rightarrow$

$\frac{2}{3}\mu - \lambda = 0$ --------- (i) (5) $\qquad \frac{1}{2} - \mu - \frac{\lambda}{2} = 0$ --------- (ii) (5)

$(i), (ii) \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{4}$ (5) $\qquad \mu = \frac{3}{8}$ (5)

$BD \perp CE \Rightarrow \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CE} = 0$

$\left(-\mathbf{b} + \frac{2}{3}\mathbf{a}\right)\left(-\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}\right) = 0$ (5)

$4|\mathbf{a}|^2 - 4(\mathbf{a}.\mathbf{b}) - 3|\mathbf{b}|^2 = 0$ (5)

(i) சாய்சதுரம் $\Rightarrow |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ (5)

$4|\mathbf{a}|^2 - 4|\mathbf{a}||\mathbf{a}|\cos\theta - 3|\mathbf{a}|^2 = 0$

$\cos\theta = \frac{1}{4}$ (5)

(ii) செவ்வகம் $\Rightarrow \mathbf{a}.\mathbf{b} = 0$ (5)

$4|\mathbf{a}|^2 = 3|\mathbf{b}|^2$

$|\mathbf{a}| = \frac{\sqrt{3}}{2}|\mathbf{b}|$ (5)

75

[பக். 16 ஐப் பார்க்க

(*b*) Oxy தளத்தில் உள்ள A, B, C, D எனும் நான்கு புள்ளிகளில் தாக்கும் நான்கு விசைகள் F_1, F_2, F_3, F_4 தொடர்பான தகவல்கள் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன. இங்கு a, P ஆகியன முறையே மீற்றர், நியூட்டனில் அளக்கப்படும் நேர் கணியங்கள் ஆகும்.

தாக்கும் புள்ளி	விசை
$A\ (2a, a)$	$F_1 = 3P\mathbf{i} + 5P\mathbf{j}$
$B\ (-a, 2a)$	$F_2 = -2P\mathbf{i} + 6P\mathbf{j}$
$C\ (-a, -a)$	$F_3 = 4P\mathbf{i} - P\mathbf{j}$
$D\ (2a, -3a)$	$F_4 = P\mathbf{i} - 2P\mathbf{j}$

தொகுதியின் விளையுளின் பருமன் $10P$ நியூட்டன் எனக்காட்டி விளையுளின் திசையைக் காண்க. உற்பத்தி O குறித்து தொகுதியின் திருப்பம் இடஞ்சுழிப்போக்கில் $9aP$ நியூட்டன் மீற்றர் ஆகும் எனக்காட்டுக. மேலும் விளையுளின் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாடு $8x - 6y - 9a = 0$ எனக்காட்டுக.

(*i*) தொகுதிக்கு $E \equiv (3a, \lambda a)$ எனும் புள்ளியில் F எனும் விசையை சேர்க்க தொகுதி சமனிலையில் இருக்கும் எனின் λ, F ஆகியவற்றைக் காண்க.

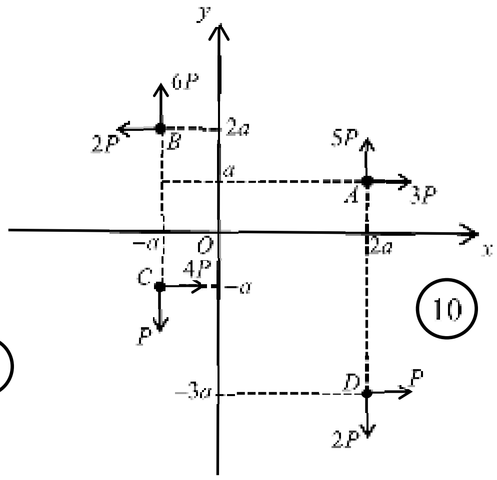
(*ii*) தொகுதிக்கு $y-$அச்சு மீது உள்ள ஒரு புள்ளி H இல் F' எனும் விசையைச் சேர்க்க தொகுதியானது இடஞ்சுழியாக $24aP$ நியூட்டன் மீற்றர் எனும் இணைக்கு ஒடுங்குகின்றது எனின் H இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

$\uparrow Y = 5P + 6P - P - 2P = 8P$ (5)

$\rightarrow X = 3P - 2P + 4P + P = 6P$ (5)

$R = \sqrt{(8P)^2 + (6P)^2} = 10P$ (5)

$\tan\alpha = \dfrac{8P}{6P} = \dfrac{4}{3}$ (5)



(10)

$\overset{\curvearrowleft}{O}$ $G = 5P \times 2a - 3P \times a + 2P \times 2a - 6P \times a + 4P \times a$
$+ P \times a + P \times 3a - 2P \times 2a$ (10)

$= 9aP\ Nm$

விளையுளின் தாக்கக்கோடு $y-$அச்சை $(0, -c)$ இல் வெட்டுகின்றது என்க.

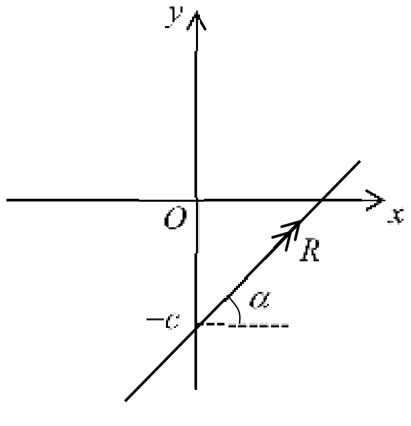
$\overset{\curvearrowleft}{O}$ $c \times 6P = 9aP$ (5)

$c = \dfrac{3a}{2}$ (5)

$\therefore$ தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாடு

$y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{3a}{2}$ (5)

$8x - 6y - 9a = 0$



(i) தொகுதி சமனிலையில் இருப்பதால்

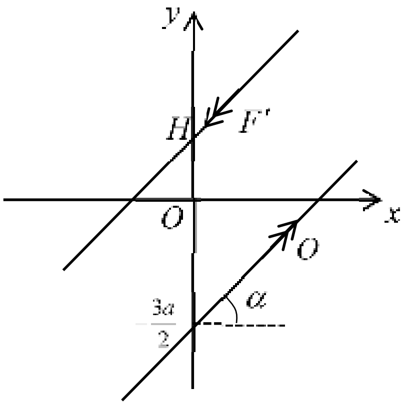
$$F = -R$$
$$F = -6P\mathbf{i} - 8P\mathbf{j} \quad (5)$$

E ஆனது தாக்கக் கோட்டின் மீது இருக்கும்

$$8(3a) - 6\lambda a - 9a = 0$$
$$\lambda = \frac{5}{2} \quad (5)$$

(ii) தொகுதி இணைக்கு ஒடுங்குவதால்

$$F' = -R$$
$$F' = -6P\mathbf{i} - 8P\mathbf{j}$$



$H \equiv (0, d)$ என்க.

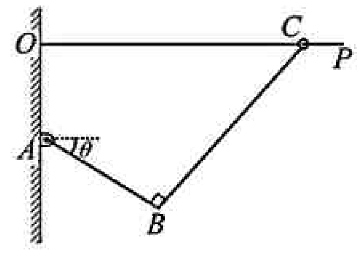
இணையின் பருமன் $= 24aP \;\; Nm$

$$|F'| \times d\cos\alpha = 24aP \quad (5)$$
$$10P \times \left(d + \frac{3a}{2}\right) \times \frac{3}{5} = 24aP$$
$$d = \frac{5a}{2} \quad (5)$$
$$H = \left(0, \; \frac{5a}{2}\right)$$

75

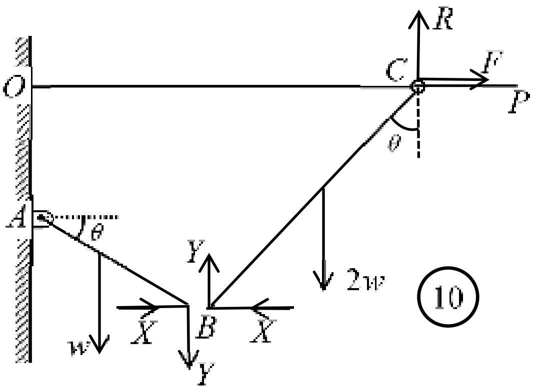
150

15. (a) AB, BC என்பன முறையே $2a, 4a$ நீளமும் $w, 2w$ நிறையும் உடைய இரு சீரான கோல்கள் ஆகும். இவை B யில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. கோல் AB யின் ஒரு முனை A ஆனது படத்தில் காட்டியவாறு ஓர் நிலைக்குத்து சுவருக்கு ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. கோல் BC யின் முனை C யிற்கு ஓர் இலேசான சிறிய வளையம் இணைக்கப்பட்டு அவ்வளையமானது OP எனும் கரடான கிடைக்கம்பி மீது சுயாதீனமாக வழுக்கக் கூடியவாறு கோர்க்கப்பட்டுள்ளது. சமனிலையில் AB கிடையுடன் θ கோணம் அமைப்பதுடன் $A\hat{B}C = \frac{\pi}{2}$ ஆக இருக்கின்றது. $\tan\theta = \frac{3}{4}$ எனத்தரப்படின் மூட்டு B யில் உள்ள மறுதாக்கத்தின் கிடை, நிலைக்குத்துக் கூறுகளின் பருமன்கள் முறையே $\frac{18w}{25}, \frac{w}{25}$ எனக்காட்டுக. மேலும் வளையத்திற்கும் கம்பிக்கும் இடையிலான உராய்வுக் குணகம் μ எனின் $\mu \geq \frac{18}{49}$ எனக்காட்டுக.



[பக். 18 ஐப் பார்க்க

கோல் AB யின் சமனிலைக்கு



$A\circlearrowleft \quad w\times a\cos\theta + Y\times 2a\cos\theta - X\times 2a\sin\theta = 0$

$$2X\times\frac{3}{5} - 2Y\times\frac{4}{5} = w\times\frac{4}{5} \quad (10)$$

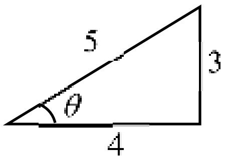
$$3X - 4Y = 2w \text{ ----------------- } (i)$$

கோல் BC யின் சமனிலைக்கு

$C\circlearrowright \quad 2w\times 2a\sin\theta - Y\times 4a\sin\theta - X\times 4a\cos\theta = 0$

$$2w\times 2\times\frac{3}{5} = 4Y\times\frac{3}{5} + 4X\times\frac{4}{5} \quad (10)$$

$$4X + 3Y = 3w \text{ ------------------- } (ii)$$



$$(i),\ (ii) \Rightarrow \quad X = \frac{18w}{25} \ (5) \qquad Y = \frac{w}{25} \ (5)$$

கோல் BC யின் சமனிலைக்கு

$$\uparrow R + Y - 2w = 0 \quad (5)$$

$$R = 2w - \frac{w}{25} = \frac{49}{25}w$$

$$\rightarrow F - X = 0 \quad (5)$$

$$F = \frac{18w}{25}$$

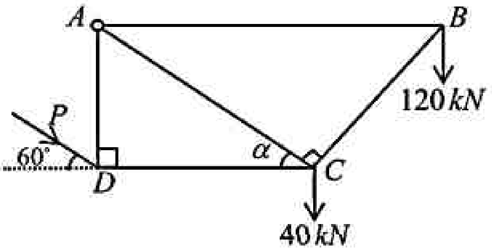
வளையமானது வழுக்காதிருப்பதற்கு

$$\frac{F}{R} \le \mu \Rightarrow \frac{18w/25}{49w/25} \le \mu \quad (5)$$

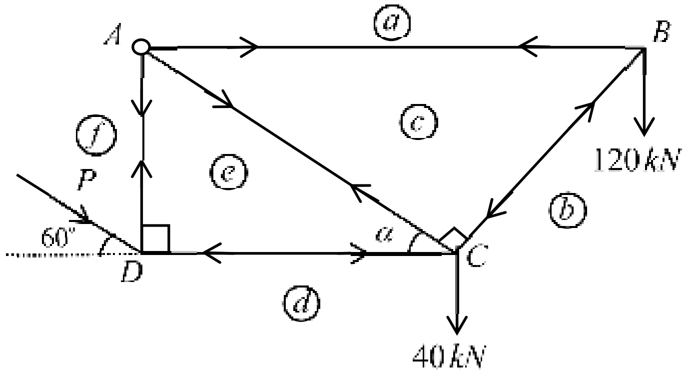
$$\therefore \ \mu \ge \frac{18}{49} \quad (5)$$

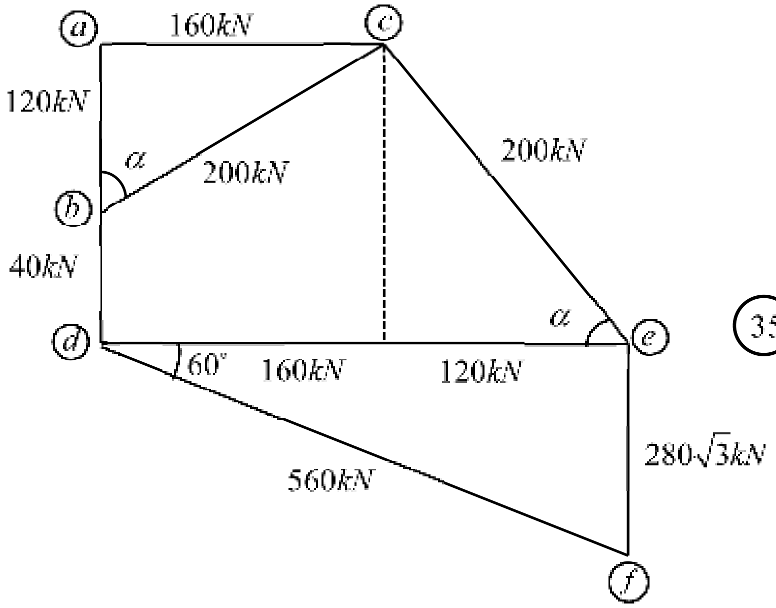
60

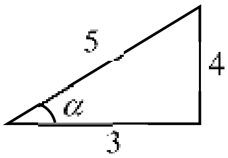
(b) AB, BC, AC, AD, CD எனும் ஐந்து இலேசான கோல்களால் ஆக்கப்பட்ட சட்டப்படல் ஒன்றை படம் காட்டுகின்றது. சட்டப்படலானது A யில் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டு B, C யில் முறையே $120\,kN,\ 40\,kN$ நிறைகள் தொங்கவிடப்பட்டு D யில் கிடையுடன் $60°$ சாய்வில் தாக்கும் P எனும் விசையால் சமனிலையில் பேணப்படுகின்றது. இங்கு $\measuredangle ACD = \alpha$ ஆக இருப்பதுடன் $\tan\alpha = \frac{4}{3}$ ஆகும். போவின் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி கோல்களில் உள்ள தகைப்புகளைக் காண்பதற்கான தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைந்து $P = 560\ kN$ எனக்காட்டுக. மேலும் கோல்களில் உள்ள தகைப்புகளைக் கண்டு அவை இழுவையா உதைப்பா என வேறுபடுத்துக.



[பக். 19 ஐப் பார்க்க







(35)

P ஆனது df இனால் தரப்படும்

$P = 560\,kN$ (5)

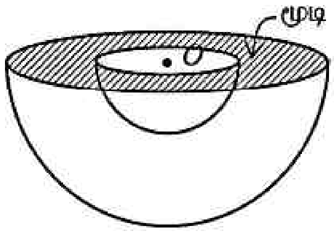
கோல்	இழுவை	உதைப்பு	
AB	$ac = 160\,kN$	–	(10)
BC	–	$bc = 200\,kN$	(10)
AC	$ce = 200\,kN$	–	(10)
AD	$ef = 280\sqrt{3}\,kN$	–	(10)
CD	–	$de = 280\,kN$	(10)

90

150

16. a ஆரையும் σ மேற்பரப்படர்த்தியும் உடைய சீரான பொள் அரைக்கோளம் ஒன்றின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் மையத்திலிருந்து சமச்சீர் அச்சு வழியே $\frac{a}{2}$ தூரத்தில் இருக்கும் எனக்காட்டுக.

O இனை மையமாகவும் $k\sigma$ மேற்பரப்படர்த்தியும் $2a$ ஆரையும் உடைய வட்ட தட்டு ஒன்றின் மையத்திலிருந்து a ஆரையுடைய வட்டப்பகுதி அகற்றப்பட்டு மூடி ஒன்று பெறப்படுகின்றது. $a, 2a$ ஆரையும் σ மேற்படர்த்தியும் உடைய இரு சீரான பொள் அரைக்கோளங்களும் மேலே கூறப்பட்ட மூடியும் அவற்றின் விளிம்புகள் வழியே ஒட்டப்பட்டு படத்தில் காட்டப்பட்ட சேர்த்திப்பொருள் உருவாக்கப்படுகின்றது. சேர்த்திப் பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம் G எனின் $OG=\frac{9a}{3k+10}$ எனக்காட்டுக. மேலும் $k\geq\frac{8}{3}$ எனின் $OG\leq\frac{a}{2}$ எனக்காட்டுக.

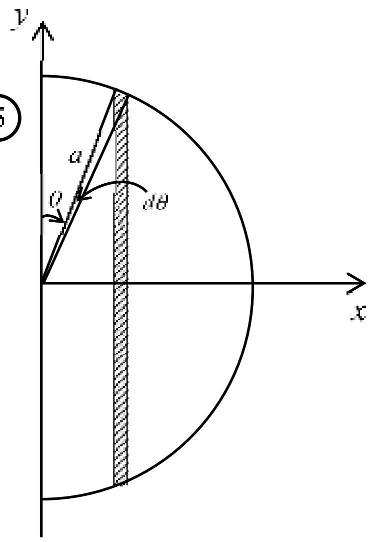


இச்சேர்த்திப்பொருளானது அதன் வெளி வளைமேற்பரப்பு ஒரு கடரான கிடைத்தரையையும் சமகரடான நிலைக்குத்து சுவரையும் தொட்டுக்கொண்டிருக்குமாறு சமனிலையில் உள்ளது. பொருளுக்கும் தொடுகை மேற்பரப்பிற்கும் இடையிலான உராய்வுக் குணகம் μ எனின் வழுக்கும் தறுவாயில் சேர்த்திப் பொருளின் வட்ட அடி கிடையுடன் அமைக்கும் கோணம் $\sin^{-1}\left(\frac{\mu(1+\mu)(3k+10)}{9(1+\mu^2)}\right)$ எனக்காட்டுக.

மேற்பரப்படர்த்தி $=\sigma$

$G\equiv(\bar{x},\bar{y})$ என்க.

சமச்சீர் காரணமாக G ஆனது $x-$அச்சுமீது கிடக்கும் $\Rightarrow \bar{y}=0$ (5)



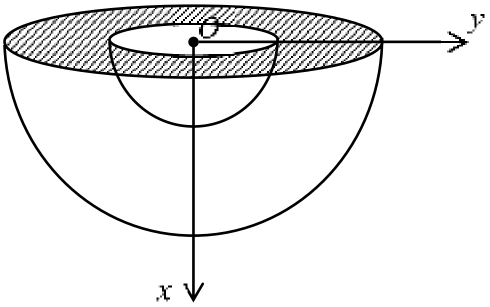
$$\left[\int_0^{\pi/2}(2\pi a\cos\theta)a.d\theta\ \sigma g\right]\bar{x}=\int_0^{\pi/2}(2\pi a\cos\theta)a.d\theta\,\sigma g.a\sin\theta \quad (10)$$

$$\left[\int_6^{\pi/2}\cos\theta\ d\theta\right]\bar{x}=a\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\ d\theta$$

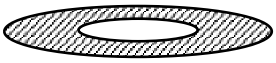
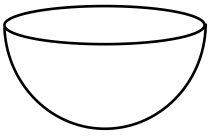
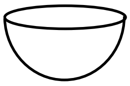
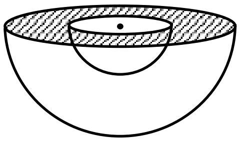
$$=\frac{a}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2\theta\ d\theta$$

$$\left[\sin\theta\Big|_0^{\pi/2}\right]\bar{x}=\frac{a}{2}\left(-\frac{\cos 2\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} \quad (10)$$

$$\bar{x}=\frac{a}{2} \quad (5)$$



[பக். 21 ஐப் பார்க்க

பொருள்	நிறை	$y-$ அச்சிலிருந்து புவியீர்ப்பு மையத்திற்கான தூரம்	
	$\left(\pi(2a)^2-\pi a^2\right)k\sigma g$ $=3\pi a^2k\sigma g$	0	(10)
	$2\pi(2a)^2\sigma g$ $=8\pi a^2\sigma g$	a	(10)
	$2\pi(a)^2\sigma g$ $=2\pi a^2\sigma g$	$\frac{a}{2}$	(10)
	$\pi\left(3k+10\right)a^2\sigma g$	$\bar{x}$	(5)

சமச்சீர் காரணமாக G ஆனது $x-$ அச்சுமீது கிடக்கும்.

$$\pi\left(3k+10\right)a^2\sigma g\times\bar{x}=3\pi a^2k\sigma g\times 0+8\pi a^2\sigma g\times a+2\pi a^2\sigma g\times\frac{a}{2} \quad (15)$$

$$\bar{x}=\frac{9a}{3k+10} \quad (5)$$

$$k=\frac{3a}{\bar{x}}-\frac{10}{3} \quad (5)$$

$$k\geq\frac{8}{3}\Rightarrow\frac{3a}{\bar{x}}-\frac{10}{3}\geq\frac{8}{3}$$

$$\bar{x}\leq\frac{a}{2}\ \Rightarrow\ OG\leq\frac{a}{2} \quad (5)$$

சேர்த்திப் பொருளின் சமனிலைக்கு

$$\rightarrow S=\mu R \quad (5)$$

$$\uparrow R+\mu S=w \quad (5)$$

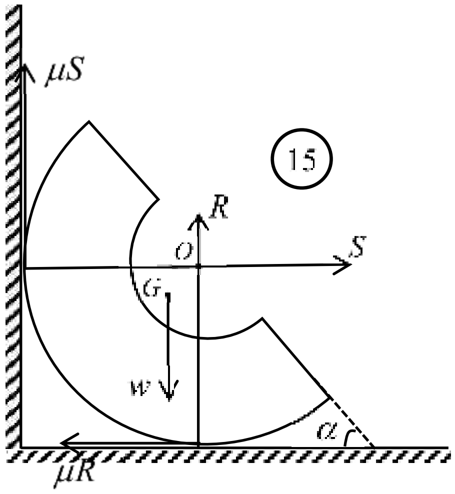
$$R=\frac{w}{1+\mu^2} \quad (5) \qquad S=\frac{\mu w}{1+\mu^2} \quad (5)$$

$$O\circlearrowleft\ w\times\bar{x}\sin\alpha-\mu R\times a-\mu S\times a=0 \quad (10)$$

$$w\times\frac{9a}{3k+10}\sin\alpha=\frac{\mu w}{1+\mu^2}\times a+\frac{\mu^2 w}{1+\mu^2}\times a$$

$$\sin\alpha=\frac{\mu(1+\mu)(3k+10)}{9(1+\mu^2)} \quad (5)$$

$$\alpha=\sin^{-1}\left(\frac{\mu(1+\mu)(3k+10)}{9(1+\mu^2)}\right) \quad (5)$$



(15)

150

17. (*a*) '*COPYRIGHT*' எனும் சொல்லில் இருந்து 5 எழுத்துக்கள் எழுமாற்றாக தெரியப்படுகின்றன. தெரியப்படும் எழுத்துக்களில் '*P*' இல்லாது இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.
பெட்டி ஒன்றினுள் 3, 4, 5 என இலக்கமிடப்பட்ட ஒரே அளவிலான மூன்று பந்துகள் உள்ளன. பந்து ஒன்று எழுமாற்றாக தெரியப்பட்டு பந்தில் உள்ள எண்ணிக்கையான எழுத்துக்கள் '*COPYRIGHT*' எனும் சொல்லில் இருந்து எழுமாற்றாக எடுக்கப்படுகின்றன.
(*i*) எடுக்கப்பட்ட எழுத்துக்களினுள் '*P*' இல்லாதிருப்பதற்கான நிகழ்தகவை மொத்த நிகழ்தகவு தேற்றத்தை பயன்படுத்தி காண்க.
(*ii*) எடுக்கப்பட்ட எழுத்துக்களினுள் '*P*' இல்லை எனின் 5 எழுத்துக்கள் எடுக்கப்பட்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

மொத்த எழுத்துக்கள் $= 9$

5 எழுத்துக்கள் தெரியப்படக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை $= {}^9C_5$

$'P'$ இல்லாமல் 5 எழுத்துக்கள் தெரியப்படக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை $= {}^8C_5$

எடுக்கப்படும் 5 எழுத்துக்களில் $'P'$ இல்லாது இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \dfrac{{}^8C_5}{{}^9C_5}$ (10)

$$= \frac{8!/3!5!}{9!/4!5!} = \frac{4}{9} \quad (5)$$

$X_n - n$ இலக்கமிடப்பட்ட பந்து எடுக்கப்படல்: $n = 3, 4, 5$

$P(X_n) = \dfrac{1}{3} \quad ; n = 3, 4, 5$

$S - 'P'$ இல்லாது எழுத்துக்கள் எடுக்கப்படல்

(*i*) $P(S) = P(S \mid X_3).P(X_3) + P(S \mid X_4).P(X_4) + P(S \mid X_5).P(X_5)$

$$= \frac{{}^8C_3}{{}^9C_3} \times \frac{1}{3} + \frac{{}^8C_4}{{}^9C_4} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} \quad (15)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{8!/5!3!}{9!/6!3!} + \frac{8!/4!4!}{9!/5!4!} + \frac{4}{9} \right) \quad (10)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{9} + \frac{4}{9} \right)$$

$$= \frac{5}{9} \quad (5)$$

(*ii*) $P(X_5 \mid S) = \dfrac{P(S \mid X_5).P(X_5)}{P(S)}$ (5)

$$= \frac{4/9 \times 1/3}{5/9} = \frac{4}{15} \quad (5)$$

(5)

60

[பக். 23 ஐப் பார்க்க

(*b*) பாடசாலை ஒன்றில் உள்ள 200 மாணவர்களின் உயரங்கள் $h\ (cm)$ ஆனது அளக்கப்பட்டது. பெறப்பட்ட தரவு $y = \dfrac{h-160}{5}$ எனும் உருமாற்றத்திற்கு உட்படுத்தப்பட்டு பின்வரும் அட்டவணை பெறப்பட்டது.

y	மீடிறன்
$(-4)-(-2)$	15
$(-2)-0$	50
$0-2$	65
$2-4$	60
$4-6$	10

மாணவர்களின் உயரங்களின் இடை μ, மாறற்றிறன் σ^2 ஆகியவற்றைக் காண்க.

மேலும் மாணவர்களின் உயரங்களினது ஆகாரம் M இனைக் கண்டு $\kappa = \dfrac{\mu - M}{\sigma}$ இனால் வரையறுக்கப்படும் ஓராயக் குணகத்தை மதிப்பிடுக.

y இன் வீச்சு	f	நடுப்பெறுமானம் (x) (5)	x^2	fx (5)	fx^2 (5)
$(-4)-(-2)$	15	-3	9	-45	135
$(-2)-0$	50	-1	1	-50	50
$0-2$	65	1	1	65	65
$2-4$	60	3	9	180	540
$4-6$	10	5	25	50	250
	$\sum f = 200$			$\sum fx = 200$ (5)	$\sum fx^2 = 1040$ (5)

$\bar{y} = \dfrac{\sum fx}{\sum f} = \dfrac{200}{200} = 1$ (10)

$y = \dfrac{h-160}{5}$

$\bar{y} = \dfrac{\bar{h} - 160}{5} \Rightarrow \bar{h} = 5 \times 1 + 160 = 165\,cm$ (10)

$\sigma_y^2 = \dfrac{\sum fx^2}{\sum f} - \bar{y}^2 = \dfrac{1040}{200} - 1^2 = 4.2$ (10)

$\sigma_y^2 = \dfrac{1}{5^2}\sigma_h^2 \Rightarrow \sigma_h^2 = 25 \times 4.2 = 105$ (10)

$\sigma_h = \sqrt{105} \simeq 10.25\ cm$

y இன் வீச்சு	h இன் வீச்சு	மீடிறன்
$(-2)-0$	$150-160$	50
$0-2$	$160-170$	65
$2-4$	$170-180$	60

(5)

$$M = L_m + c\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}\right) = 160 + 10\left(\frac{15}{15+5}\right) = 167.5\ cm$$ (10)

$$\kappa = \frac{\mu - M}{\sigma} = \frac{165-167.5}{\sqrt{105}}$$ (5)

$$= -\frac{5}{2\sqrt{105}}$$ (5)

$$\simeq -0.244$$

90

150

✵✵✵